ORSAY
n° d'ordre : 3167

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3° CYCLE

SPECIALITE : PHYSIQUE THEORIQUE

PAR

M. MAILLET Jean Michel

SUJET : RENORMALISATION ET THEORIES COMPLETEMENT INTEGRABLES

soutenue le 02 MARS 1982 devant la Commission d'examen

MM. MEYER Président

de VEGA

EPSTEIN

LOWENSTEIN

NEVEU

Ce document doit être remis à l'étudiant à l'issue de la soutenance

ORSAY
n° d'ordre : 3167

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3° CYCLE

SPECIALITE : PHYSIQUE THEORIQUE

PAR

M. MAILLET Jean Michel

SUJET : RENORMALISATION ET THEORIES COMPLETEMENT INTEGRABLES

soutenue le 02 MARS 1982 devant la Commission d'examen

MM. MEYER Président

de VEGA

EPSTEIN

LOWENSTEIN

NEVEU

Ce document doit être remis à l'étudiant à l'issue de la soutenance.

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur J.L. Basdevant et Monsieur le Professeur M. Lévy de m'avoir accueilli au Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies à l'Université Pierre et Marie Curie.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Hector J. de Vega qui m'a proposé ce sujet de thèse et qui a guidé avec une amabilité constante mes premiers pas dans la Recherche.

Je suis très reconnaissant à Messieurs H. Epstein, A. Neveu, à Monsieur le Professeur J.H. Lowenstein pour m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon Jury de thèse et à Monsieur le Professeur P. Meyer qui a accepté d'en être le Président.

Je remercie également O. Babelon, H. Eichenherr, V.E. Korepin, J.C. Le Guillou, F. Schaposnik et C.M. Viallet pour les discussions enrichissantes dont j'ai pu profiter.

Je tiens enfin à remercier l'ensemble du Secrétariat et D. Bernia qui ont permis de mener à bien la réalisation matérielle de cette thèse.

o o

o

SOMMAIRE

Page

I. Introduction 3

II. Matrice S factorisable et modèles statistiques 8
1. Matrices S factorisables. Equations de factorisation
2. Matrices S relativistes factorisables avec symétrie O(N)
3. Les modèles statistiques sur réseaux Z-invariants

III. La méthode du problème inverse classique 32
1. La méthode générale
2. Le modèle Complex Sine Gordon
a. Les origines du modèle
b. La méthode du problème inverse classique
c. Les courants conservés

IV. Le modèle Complex Sine Gordon quantique 60
1. Propriétés de renormalisation et matrice S quantique pour un modèle classiquement intégrable
2. Théorie quantique invariante U(1) de modèles classiques intégrables

V. Conclusion 64

Références 70

CHAPITRE I

Introduction

Les théories intégrables possèdent historiquement une double origine. L'une, purement mathématique, est dûe à Liouville et date de 1853 [1] . L'autre relève de l'anecdote et provient d'une observation fort intéressante faite par Scott Russell en 1834 [2] : "Il observait un bateau sur un canal, halé par des chevaux ; lorsque le bateau s'arrêta, la masse d'eau qu'il avait mise en mouvement s'accumula vers l'avant, puis se propagea à grande vitesse. Scott Russell la suivit à cheval pendant plusieurs kilomètres, remarquant qu'elle continuait son chemin à vitesse constante et sans changer de forme". Les ondes solitaires, ou solitons, faisaient alors leur première apparition. A cette époque le phénomène déclencha une vive polémique qui ne cessa pratiquement qu'en 1895 avec l'introduction par Korteweg et de Vries [3] d'une équation non linéaire pour les ondes hydrodynamiques (KdV) (ondes de surface dans un canal peu profond). La compensation des effets de non linéarité et de dispersion autorisait, en effet, l'existence de solutions solitons possédant les propriétés décrites par Scott Russell.

Le problème resta ensuite en l'état, si ce n'est l'apparition progressive dans divers domaines de la physique (liquides, solides, etc) d'équations non linéaires possédant des solutions du type soliton. De manière indépendante, pendant les années cinquante, Gel'fand et Levitan écrivent des équations intégrales pour la théorie de la diffusion par un potentiel permettant de déterminer le potentiel à partir des données spectrales du problème [4] . En 1967, enfin, C.S. Gardner et al [5] font la jonction entre les équations non linéaires telle (KdV) et le problème Inverse de diffusion. La Transformation Spectrale Inverse est alors interprétée comme une généralisation non linéaire de la transformation de Fourier. Les progrès sont ensuite rapides. En 1973, M.J. Ablowitz et al élargissent considérablement la classe des modèles solubles par la méthode du Problème Inverse [6] . Dans les années 1974-1975, les problèmes

de la quantification des solitons sont abordés avec un intérêt tout particulier pour la Physique des Particules [7, 8] .

Parallèlement, les modèles intégrables se sont développés en Physique Statistique. De nouveaux modèles solubles sont développés par Yang [9] (particules en interaction delta) et par Baxter [10,] (modèles à vertex sur réseaux réguliers et irréguliers). En 1978, une évolution décisive se produit avec l'élaboration par Faddeev et al [11] d'une Méthode Spectrale Inverse Quantique (dont la limite classique est la méthode du Problème Inverse classique). Cette méthode unifie de manière spectaculaire les modèles de Yang, de Baxter et les Problèmes Inverses de diffusion. Depuis lors, la méthode a enregistré de nombreux succès et notamment pour le modèle de Sine-Gordon quantique [12] . Elle a permis en outre la construction de nouveaux modèles intégrables (pour une revue voir[13]).

Les Méthodes Spectrales Inverses tant Classique que Quantique ont donc de multiples applications que ce soit pour la Physique des Plasmas, des Fluides (KdV), pour la Mécanique Statistique (modèle de Baxter, modèles ferromagnétiques ou ferroélectriques [14]) ou encore pour la Physique des Particules (Sine-Gordon) qui est la première Théorie Quantique des Champs relativiste à être résolue exactement) et plus récemment pour le modèle des cordes (et des surfaces aléatoires) [15].

Enfin, le domaine des modèles intégrables s'est enrichi d'une approche matrice S très fructueuse [16] avec possibilité de généralisation à des dimensions supérieures à deux [17].

L'objet de mon travail se situe à l'intérieur du cadre que nous venons de parcourir.

Le Chapitre II est consacré à l'approche matrice S des modèles solubles de Théorie des Champs. Un intérêt tout particulier est porté sur la notion de factorisabilité de la matrice S en dimension d = 1 + 1

ainsi que ses relations avec les équations triangulaires (Yang-Baxter). Le cas à symétrie O(N) est alors explicitement résolu. Enfin, les équations triangulaires nous permettent de connecter les modèles à vertex sur réseaux et les matrices S factorisables. On examine dans cette optique le modèle de Baxter à 8 vertex [10] .

Le chapitre III apporte, au niveau classique, une solution au problème de la construction de Théories des Champs solubles par la Méthode Spectrale Inverse Classique. De plus, ces modèles sont candidats après quantification à être complétement solubles au niveau quantique. La méthode est tout d'abord décrite de manière générale. On examine ensuite une large classe de modèles solubles par la méthode AKNS [6] . La méthode est alors appliquée en détail sur un modèle intéressant de cette classe : le modèle Complex Sine-Gordon (Lund-Regge, Pohlmeyer) qui est le seul modèle (avec Sine-Gordon) de Théorie des Champs Relativiste à être soluble par la Méthode Spectrale Inverse Classique. La procédure du calcul des solutions multisolitons est explicitée. Enfin, un nombre infini de courants conservés sont construits.

Le Chapitre IV est consacré à l'étude du modèle Complex Sine-Gordon Quantique et de modèles de Théorie des Champs à symétrie O(N), ($N \geqslant 1$) à matrice S factorisable.

Au niveau classique (arbres), on montre que la factorisabilité de la matrice S est une contrainte suffisante pour déterminer complétement la théorie (au niveau du Lagrangien). Au niveau quantique, une étroite connection entre complète intégrabilité et propriétés du Groupe de Renormalisation est mise en évidence. De plus, un courant conservé quantique non "trivial" (c'est-à-dire autre que le courant électrique et le tenseur énergie-impulsion) est construit. Enfin, le spectre semi-classique pour la solution à un soliton est calculé.

Le Chapitre V rappelle les résultats importants et envisage

leurs implications pour les modèles de Physique Statistique et de Théorie des Champs.

CHAPITRE II

Matrice S Factorisables et Modèles Statistiques

Un des objectifs principaux de toute théorie quantique des champs est le calcul de la matrice de diffusion S. A deux dimensions d'espace temps (d = 1 + 1) (et pour ne pas parler de dimensions plus élevées) la matrice S est un objet très compliqué dans le cas général. Néanmoins, en dimension d = 1 + 1, il est possible d'obtenir des matrices S non triviales mais dont le calcul sous une forme fermée est considérablement simplifié. C'est le cas des amplitudes de diffusion factorisables. En effet, cette factorisabilité de la matrice S à d = 1 + 1 implique une structure très spéciale pour les amplitudes de diffusion à n particules ($n \in IN$, $n \geqslant 2$). Elles peuvent s'exprimer en un produit d'amplitude de diffusion à 2 particules (amplitude $2 \to 2$). Tout se passe donc comme si le processus de diffusion à n particules pouvait être représenté par une succession de collisions élastiques à deux particules (donc sans production) séparés par des intervalles du genre espace et avec un mouvement libre entre deux collisions.

Les premières matrices S factorisables furent mises en évidence dans le cadre d'un modèle classique de particules interagissant par des potentiels δ [9]. Aujourd'hui nous savons que cette situation est typique des interactions entre solitons solutions d'équations non linéaires solubles par la méthode du Problème Inverse.

Cette propriété de factorisation implique donc une simplification importante pour le calcul de la matrice S totale. En effet il suffit de pouvoir calculer l'amplitude $(2 \to 2)$ pour en déduire les amplitudes à nombre quelconque de particules. La consistance d'une telle factorisation impose de plus de nouvelles contraintes sur l'amplitude $(2 \to 2)$. Celle-ci doit en effet satisfaire des équations de factorisation appelées encore <u>équations triangulaires</u>.

Ces relations comme nous le verrons permettent dans certains cas le calcul exact de l'amplitude à deux particules et donc la détermination exacte de la matrice S totale.

Ces mêmes équations triangulaires ont été également mises en évidence en Mécanique Statistique (modèle à 8 et 6 vertex par exemple [10]). Ce lien permet de faire une relation étroite entre des modèles de théorie quantique des champs à d = 1 + 1 et des modèles statistiques à vertex en deux dimensions d'espace. Enfin ces "équations triangulaires" peuvent être généralisées en dimension trois pour les modèles à vertex, ce qui montre encore leur importance [17] . Ce fait peut en effet constituer un point de départ pour des Théories Quantiques des Champs (non plus de particules mais d'objets étendus) solubles à dimensions supérieures à deux.

1) Matrices S factorisables. Equations de factorisation

Une question importante du problème est l'existence de Théories Quantiques des Champs possédant une matrice S factorisable. Considérons donc une théorie à d = 1 + 1 dont la dynamique sous-jacente est gouvernée par un nombre infini de lois de conservation. Si les charges correspondantes sont diagonales dans les états à une particule, nous avons

$$Q_n \, | p^{(a)} \rangle = \omega_n^{(a)}(p) \, | p^{(a)} \rangle \qquad (2.1)$$

où p désigne le vecteur impulsion-énergie et (a) la masse de la particule si la théorie en contient plusieurs. Supposons de plus que les valeurs propres $\omega_n(p)$ forment un ensemble de fonctions indépendantes. La conservation de la charge va impliquer de très fortes "règles de sélection".

Par exemple, pour la théorie Sine-Gordon, nous avons

$$\omega_{2n+1}^{(a)}(p) = p^{2n+1} \quad ; \quad \omega_{2n}^{(a)}(p) = \left(p^2 + m_a^2\right)^{1/2} p^{2n} \qquad (2.2)$$

et donc

(i) Si $\{m_a\}$ est le spectre de masse, le nombre de particules de même masse m_a reste inchangé après la collision.

(ii) L'ensemble final des vecteurs impulsion-énergie est le même que celui dans la voie d'entrée.

En effet nous avons

$$Q_n \,|\, p_1^{(a_1)}, \cdots, p_k^{(a_k)} \text{ in (out)} \rangle =$$

$$= \left(\omega_n^{(a_1)}(p_1) + \cdots + \omega_n^{(a_k)}(p_k) \right) | \, p_1^{(a_1)}, \cdots, p_k^{(a_k)} \text{ in (out)} \rangle \quad (2.3)$$

et $\frac{d}{dt} Q_n = 0$

par conséquent $$\sum_{i \in (in)} \omega_n^{(a_i)}(p_i) = \sum_{j \in (out)} \omega_n^{(a_j)}(p_j) \quad (2.4)$$

Ceci implique en particulier la conservation du nombre de chaque sorte de particules (indépendance des fonctions $\omega_n^{(a_j)}$) et de plus la conservation de l'ensemble des valeurs des vecteurs impulsion-énergie. Donc, compte-tenu de la cinématique très particulière à d = 1 + 1 et de ces règles de sélection, il semble que la matrice S puisse être exprimée en terme de l'amplitude (2 → 2). En effet, les considérations précédentes impliquent l'absence de production de particules au cours des processus d'interaction. Ceci implique une propriété très forte sur les fonctions de Green "une particule irréductible" de la théorie quantique. En effet, écrivons le propagateur de la théorie sous la forme :

$$\frac{1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} \right) + i\pi \delta(m^2 - p^2) \quad (2.5)$$

Le terme de droite conduit à la factorisation du diagramme initial en plusieurs diagrammes connexes . Le premier terme conduit à la partie principale de la fonction de Green initiale. Par exemple, l'amplitude 2 → 4 doit s'annuler, et donc la partie principale de la fonction de Green associée doit également prendre une valeur nulle sur la couche de masse. L'autre terme (le terme en $\delta(m^2 - p^2)$) conduit alors à une amplitude factorisée dans la voie 3 → 3.

Une preuve rigoureuse des implications d'un nombre infini de lois de conservation pour la factorisabilité de la matrice S est donnée dans la référence [18].

Ainsi les théories complètement intégrables au niveau classique par la méthode du Problème Inverse et qui possèdent donc une infinité de charges conservées indépendantes seront des candidates à la solution de ce problème. La matrice S sera factorisable à l'ordre "arbre", la factorisation de la matrice S quantique à tous les ordres dépendra de la survivance ou non au niveau quantique (lorsque la théorie est renormalisable) du nombre infini de lois de conservation (ceci est réalisé pour le modèle de Sine-Gordon par exemple [19]).

Considérons à présent une matrice S factorisable. La diffusion à n particules peut se représenter de manière assez simple. Soit en effet n particules d'impulsion initiales $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ et arrangées dans l'ordre inverse $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ pour un temps $t \to -\infty$. Les (n) particules entrent en interaction par paire, se déplaçant entre deux "collisions" comme des particules réelles (non virtuelles). Après $\frac{n(n-1)}{2}$ "collisions" par paire les diverses particules sont arrangées sur l'axe des x suivant un ordre croissant déterminé par les impulsions $x'_1 > x'_2 > \dots > x'_n$.

On peut représenter le processus en un diagramme spacial assez simple (fig. 1).

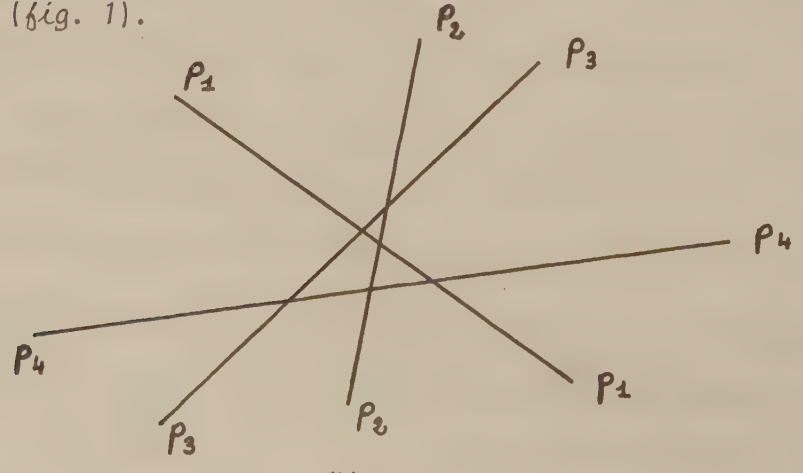


Figure 1

Chaque ligne correspond à une valeur de l'impulsion qui est reliée à la pente de cette droite. La collision de deux particules est donc représentée par l'intersection de deux lignes (il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ intersection pour n particules dans la voie d'entrée). Le temps est supposé s'écouler de bas en haut. A chaque intersection de lignes correspond une amplitude $(2 \longrightarrow 2)$. L'amplitude totale du processus est donnée par le produit des $\frac{n(n-1)}{2}$ amplitudes $(2 \longrightarrow 2)$ correspondant à chaque intersection. De plus on doit sommer sur les différentes sortes de particules qui circulent sur des lignes internes et qui conduisent à un état final identique (l'état initial étant fixé).

Mais le même processus de diffusion peut être représenté de différentes manières : il suffit de translater parallèlement à elles-mêmes chaque ligne du diagramme. Le résultat final doit rester inchangé, c'est-à-dire que quelque soit l'ordre des "collisions" l'amplitude et la phase de l'état final restent les mêmes. Ceci impose des relations de consistance sur la matrice S à 2 particules. En effet, le résultat final est inchangé si -et seulement si- les deux diagrammes suivants donnent la même amplitude.

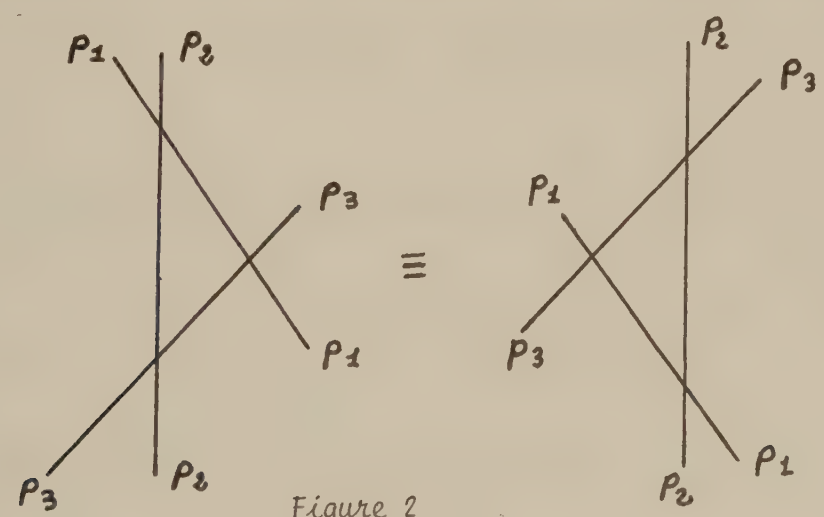


Figure 2

Cette relation de consistance est aussi appelée <u>équation triangulaire</u>. Elle peut s'écrire algébriquement d'une manière assez simple. En effet à dimension d = 1 + 1 chaque vecteur impulsion-énergie peut s'écrire

$$p_a^0 = m_a \operatorname{ch} \theta_a \quad ; \quad p_a' = m_a \operatorname{sh} \theta_a \tag{2.6}$$

où θ_a est la rapidité de la particule.

L'amplitude à deux particules $S(p_a, p_b)$ devient ainsi une fonction de la différence des rapidités des deux particules qui interagissent $\theta_{ab} = \theta_a - \theta_b$

Cette quantité est simplement connectée dans le canal s à la qualité invariante.

$$s_{ab} = (p_a + p_b)_\mu^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2 m_a m_b \operatorname{ch} \theta_{ab}$$

(m_a et m_b sont les masses respectives des particules (a) et (b)).

Le diagramme de la Figure 2 s'écrit donc algébriquement pour les matrices S à deux particules considérées comme opérateurs agissant sur un produit tensoriel de trois espaces à une particule :

$$S_{12}(\theta_1 - \theta_2)_{j_1 j_2 j_3}^{i_1 i_2 i_3} = S(\theta_1 - \theta_2)_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \delta_{j_3}^{i_3} \tag{2.7}$$

La dynamique en deux dimensions d'espace temps impose :

$$S(\theta_1 - \theta_2)_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = \langle A_{j_1}(p_1') A_{j_2}(p_2') \text{ out} \mid A_{i_1}(p_1) A_{i_2}(p_2) \text{ in} \rangle \tag{2.8}$$

et l'on a

$$S(\theta_1 - \theta_2)_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = \delta(p_1 - p_1') \delta(p_2 - p_2') S^{(1)}(\theta_1 - \theta_2)_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} + \\ + (i_1 \leftrightarrow i_2 \text{ et } p_1 \leftrightarrow p_2) \tag{2.9}$$

Le diagramme de la Figure 2 s'écrit alors (avec sommation sur les indices répétés) :

$$S^{(1)}(\theta_{12})_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \delta_{j_3}^{i_3} S^{(1)}(\theta_{13})_{i_1 i_3}^{l_1 l_3} \delta_{i_2}^{l_2} S^{(1)}(\theta_{23})_{l_2 l_3}^{k_2 k_3} \delta_{l_1}^{k_1} =$$

$$= S^{(1)}(\theta_{23})_{j_2 j_3}^{i_2 i_3} \delta_{j_1}^{i_1} S^{(1)}(\theta_{13})_{i_1 i_3}^{l_1 l_3} \delta_{i_2}^{l_2} S^{(1)}(\theta_{12})_{l_1 l_2}^{k_1 k_2} \delta_{l_3}^{k_3} \tag{2.10}$$

Soit encore en posant $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\theta' = \theta_2 - \theta_3$

on obtient l'équation triangulaire standard

$$S^{(1)\,i_1 i_2}_{j_1 j_2}(\theta)\; S^{(1)\,k_1 l_3}_{i_1 j_3}(\theta+\theta')\; S^{(1)\,k_2 k_3}_{i_2 l_3}(\theta') =$$

$$S^{(1)\,k_1 k_2}_{l_1 l_2}(\theta')\; S^{(1)\,l_1 k_3}_{j_1 i_3}(\theta+\theta')\; S^{(1)\,l_2 i_3}_{j_2 j_3}(\theta) \qquad (2.11)$$

Dans le cas de matrices S relativistes, nous avons à imposer plusieurs relations d'invariance (T , P , unitarité, analyticité...)

1) T invariance $S = S^T$ soit $S^{ij}_{kl}(\theta) = S^{kl}_{ij}(\theta)$ (2.12)

2) P invariance $S = PSP$ avec $P^{ab}_{cd} = \delta^a_d\, \delta^b_c$

soit $S^{ij}_{kl}(\theta) = S^{ji}_{lk}(\theta)$ (2.13)

3) Unitarité $SS^+ = \mathbb{1}$ soit $S^{ij}_{kl}(\theta)\, S^{kl\,*}_{mn}(\theta) = \delta^i_m\, \delta^j_n$ (2.14)

4) Analyticitë $S^{ij}_{kl}(\theta^*)^* = S^{ij}_{kl}(-\theta)$ (2.15)

qui exprime que sur l'axe imaginaire l'amplitude est réelle. En particulier pour $\mathrm{Im}\,\theta = 0$ on a $S^{ij}_{kl}(-\theta) = S^{ij\,*}_{kl}(\theta)$

Enfin si la matrice S doit être invariante sur un groupe G de symétrie agissant sur les états de particules, nous avons

$$S^{ij}_{kl}(\theta) = M^i_{i'}\, M^j_{j'}\, S^{i'j'}_{k'l'}(\theta)\, (M^{-1})^{k'}_{k}\, (M^{-1})^{l'}_{l} \qquad (2.16)$$

pour tout élément M de G.

On obtient également une propriété importante à partir des relations précédentes, la relation d'unitarité

$$S^{ij}_{mn}(\theta)\; S^{mn}_{kl}(-\theta) = \delta^i_k\, \delta^j_l \qquad (2.17)$$

La symétrie de croisement se traduit par l'invariance de la matrice S par la transformation $p_{ab} \longrightarrow 2m_a^2 + 2m_b^2 - p_{ab}$ soit en terme

de variable θ , la transformation $\theta \longrightarrow i\pi - \theta$

$$S_{k\ell}^{ij}(\theta) = S_{kj}^{i\ell}(i\pi - \theta) \qquad (2.18)$$

(Cette relation ne vaut évidemment que dans le cas relativiste).

Remarquons que dans le cas non-relativiste toutes les autres relations valent (mis à part le croisement)

2) Matrices S relativistes factorisables avec symétrie O(N)

Nous allons illustrer les propriétés très générales de la section précédente par un exemple complètement soluble, celui de matrices S factorisables avec symétrie O(N) [16]

L'invariance de Lorentz et O(N) impose la forme invariante pour la matrice S à deux particules

$$S_{j\ell}^{ik} = \langle A_j(p_1') A_\ell(p_2') \text{ out} \,|\, A_i(p_1) A_k(p_2) \text{ in} \rangle$$

où $A_j(p_m)$ désigne un état à une particule de type j

et avec

$$S_{j\ell}^{ik} = \delta(p_1 - p_1')\,\delta(p_2 - p_2')\left\{\delta^{ik}\delta_{j\ell}\,S_1(s) + \right.$$

$$\left. + \delta_j^i \delta_\ell^k S_2(s) + \delta_\ell^i \delta_j^k S_3(s)\right\} \pm \left\{ i \leftrightarrow k\,,\ p_1 \leftrightarrow p_2 \right\} \qquad (2.19)$$

Avec les signes + (-) pour le cas des bosons (resp fermions) et $s = (p_1 + p$

$S_1(s)$ décrit les processus d'annihilations, $S_2(s)$ les processus de transitions et $S_3(s)$ ceux de reflections.

Nous avons $s = 4m^2 ch^2 \frac{\theta}{2}$, θ étant la différence des rapidités entre les particules (1) et (2).

La symétrie de croisement devient dans ce cas

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta) \qquad (2.19.a)$$

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta) \qquad (2.19.b)$$

Les conditions d'unitarité nous donnent

$$S_2(\theta) S_2(-\theta) + S_3(\theta) S_3(-\theta) = 1 \qquad (2.20.a)$$

$$S_2(\theta) S_3(-\theta) + S_2(-\theta) S_3(\theta) = 0 \qquad (2.20.b)$$

$$N S_1(\theta) S_1(-\theta) + S_1(\theta) S_2(-\theta) + S_1(\theta) S_3(-\theta) + + S_2(\theta) S_1(-\theta) + S_3(\theta) S_1(-\theta) = 0 \qquad (2.20.c)$$

Les équations de factorisation sont différentes pour les cas N = 2 et $N \geqslant 3$. On obtient :

$$N=2 \quad S_2 S_1 S_3 + S_2 S_3 S_3 + S_3 S_3 S_2 = S_3 S_2 S_3 + S_1 S_2 S_3 + + S_1 S_1 S_2$$

$$S_3 S_1 S_3 + S_3 S_2 S_3 = S_3 S_3 S_1 + S_3 S_3 S_2 + S_2 S_3 S_1 + S_2 S_3 S_3 + + 2 S_1 S_3 S_1 + S_1 S_3 S_2 + S_1 S_3 S_3 + S_1 S_2 S_1 + S_1 S_1 S_1$$

(2.21)

et pour $N \geqslant 3$

$$S_2' S_3' S_3' + S_3' S_3' S_2' = S_3' S_2' S_3'$$

$$S_2' S_1' S_1' + S_3' S_2' S_1' = S_3' S_1' S_2'$$

$$N S_1' S_3' S_1' + S_1' S_3' S_2' + S_1' S_3' S_3' + S_1' S_2' S_1' + S_2' S_3' S_1' + + S_3' S_3' S_1' + S_1' S_1' S_1' = S_3' S_1' S_3'$$

(2.22)

dans chaque terme $S_i S_j S_k$ les arguments sont respectivement θ, $\theta + \theta'$, θ' que nous avons omis pour raison de simplicité d'écriture.

La résolution de ces équations s'effectue de la manière suivante [16] :

Considérons $S_3(\theta) \neq 0$ on peut définir les rapports

$$h(\theta) = \frac{S_2(\theta)}{S_3(\theta)} \qquad g(\theta) = \frac{S_1(\theta)}{S_3(\theta)} \qquad (2.23)$$

Dans le cas N = 2 les équations (2.20) s'écrivent :

$$h(\theta) + h(\theta') - h(\theta+\theta') = g(\theta')\, h(\theta+\theta') +$$

$$+ g(\theta')\, g(\theta+\theta')\, h(\theta) - h(\theta')\, g(\theta+\theta')$$

et $$\{1 + h(\theta+\theta') + g(\theta+\theta')\}\{1 - g(\theta)\, g(\theta')\} +$$

$$+ h(\theta)\, h(\theta') = \{1 + g(\theta) + h(\theta)\}\{1 + g(\theta') + h(\theta')\}$$

Si on substitue $\theta = 0$ ou $\theta' = 0$ on obtient :

$$\{1 - g^2(\theta)\}\, h(0) = 0 \qquad (2.24.a$$

$$\{1 + g(\theta)\}\{g(0)\,(1 + g(\theta) + h(\theta)) + h(0)\} = 0 \qquad (2.24.b$$

$$\{1 + g(\theta)\}\{h(0) - g(0)\, h(\theta)\} = 0 \qquad (2.24.c$$

Trois cas peuvent alors se présenter :

$g(\theta) = 1$ et $h(\theta) = -1$ ce qui contredit l'unitarité .

Le second cas est

$g(\theta) = -1$ et $h(\theta)$ quelconque qui est solution.

Et le troisième cas

$$g(0) = h(0) = 0$$

Par dérivation par rapport à θ' et en prenant la valeur des dérivées en $\theta' = 0$, nous avons d'après (2.24)

$$h'(\theta) = \{1 + g(\theta)\}\{\alpha - \beta\, h(\theta)\}$$

et $h'(\theta) + g'(\theta) = \{1 + g(\theta)\}\{\alpha + \beta\, h(\theta) + \beta(1+g($

avec $\alpha = h'(0)$ et $\beta = g'(0)$ (2.25)

Ces équations peuvent se réécrire :

$$g(\theta) = \beta\, h(\theta)\, \frac{h(\theta) + 1}{\alpha - \beta\, h(\theta)} \qquad (2.26.a$$

et

$$h'(\theta) = \beta\, h^2(\theta) + \alpha \qquad (2.26.b$$

dont la solution est :

$$h(\theta) = -i \, tg\left(\frac{4\pi\delta}{\gamma}\right) th\left(\frac{4\pi\theta}{\gamma}\right) \qquad (2.27.a)$$

$$g(\theta) = th\left(\frac{4\pi\theta}{\gamma}\right) \coth\left(\frac{4\pi}{\gamma}(i\delta - \theta)\right) \qquad (2.27.b)$$

avec $$\alpha = -i\left(\frac{4\pi}{\gamma}\right) tg\left(\frac{4\pi\delta}{\gamma}\right) \qquad (2.28.a)$$

et $$\beta = -i\left(\frac{4\pi}{\gamma}\right) \cot g\left(\frac{4\pi\delta}{\gamma}\right) \qquad (2.28.b)$$

La condition d'analyticité réelle impose que $h(\theta)$ et $g(\theta)$ soient réels pour θ imaginaire pur et donc δ et γ sont des paramètres réels.

On écrit de même le cas $N \geqslant 3$

$$h(\theta+\theta') = h(\theta) + h(\theta') \qquad (2.29)$$

et donc $$S_3'(\theta) = -i\frac{\lambda}{\theta} S_2'(\theta) \qquad \lambda \text{ réel arbitraire} \qquad (2.30)$$

En utilisant les relations (2.22) on obtient $\left(\rho(\theta) = \dfrac{S_1'(\theta)}{S_2'(\theta)} \right)$

$$\rho(\theta+\theta')\,\rho(\theta') = \frac{i\lambda}{\theta}\left\{\rho(\theta') - \rho(\theta+\theta')\right\} \qquad (2.31)$$

et donc $$\rho(\theta) = \frac{-i\lambda}{iK - \theta} \qquad \text{avec K réel} \qquad (2.32)$$

De plus l'équation (2.22) nous donne également

$$K = i\left(\frac{N-2}{2}\right)\lambda \qquad (2.33)$$

$$S_2(\theta)\, S_2(-\theta) = \frac{\sin^2\left(\frac{4\pi\delta}{\gamma}\right) \sh^2\left(\frac{4\pi\theta}{\gamma}\right)}{\sin^2\left(\frac{4\pi\delta}{\gamma}\right) \sh^2\left(\frac{4\pi\theta}{\gamma}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi\delta}{\gamma}\right) \ch^2\left(\frac{4\pi\theta}{\gamma}\right)} = \Delta(\theta) \qquad (2.34)$$

$$S_2'(\theta)\, S_2'(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2} \qquad (2.35)$$

Nous n'avons pas encore utilisé les relations (2.19) résultant de la symétrie de croisement. Ainsi toutes les considérations utilisées jusqu'à présent sont valides pour la limite non relativiste

$\theta_{12} \to \frac{k_{12}}{m} = \frac{k_1 - k_2}{m}$ où k_1 et k_2 sont les impulsions des particules qui interagissent. Dans le cas relativiste, la symétrie de croisement impose une restriction supplémentaire sur les paramètres libres (γ, δ) et (κ, λ).

La relation (2.19) ne sera satisfaite que si $\delta = \pi$ dans (2.28.a) et (2.28.b).

De même λ doit vérifier $\lambda = \frac{2\pi}{N-2}$

Ainsi il reste un paramètre libre γ dans le cas N = 2. Dans le cas $N \geqslant 3$, il n'y a par contre aucun paramètre libre (voir la contre partie lagrangienne de ceci Chapitre IV). L'équation (2.34) permet de déterminer S_2 (ou S_2'). Dans les cas N = 2 et $N \geqslant 3$ les solutions ont une ambiguité CDD [20]. Une solution arbitraire peut être obtenue en multipliant une solution particulière "minimale" par une fonction $f(\theta)$ du type :

$$f(\theta) = \prod_{k=1}^{L} \frac{\sinh\theta + i \sin\alpha_k}{\sinh\theta - i \sin\alpha_k} \qquad (2.36)$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_L$ sont des nombres réels arbitraires.

La solution du problème ayant le nombre minimum de singularité dans le plan complexe θ (solution minimale) peut être obtenue en écrivant une solution de dispersion (sur S_2 par exemple) [21]

Nous avons $S_2(-\theta) = S_2(i\pi + \theta)$ et donc le produit $S_2(\theta)\, S_2(i\pi + \theta)$ est explicitement connu d'après (2.34), notons le $\Delta(\theta)$.

$S_2(\theta)$ est analytique dans la bande D définie dans le plan complexe θ par $0 \leqslant Im\,\theta \leqslant \pi$ (fig. 3)

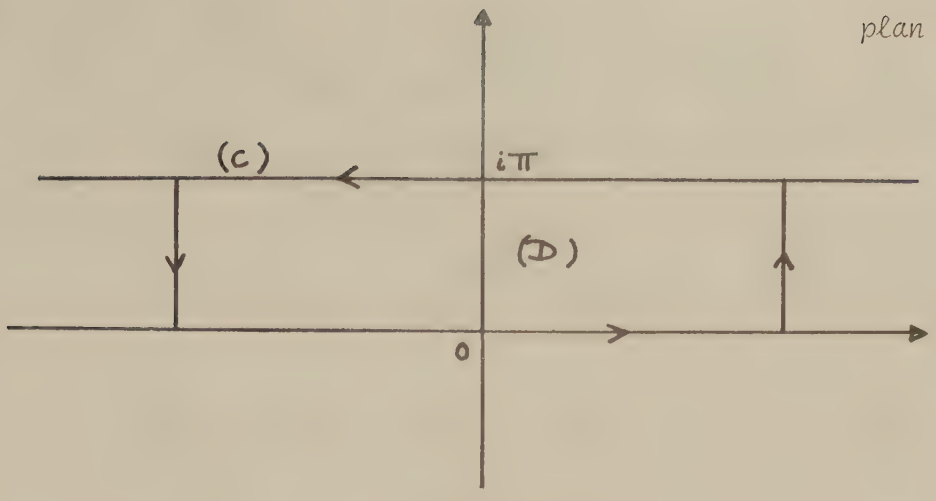


Figure 3

On a alors

$$\ln S_2(\theta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{dz}{\sh(z-\theta)} \ln S_2(z) \qquad (2.37)$$

Déformons (C) de telle manière que l'on ait si $\delta(\theta) = \frac{1}{2i} \ln S_2(\theta)$

$$\left(\lim_{\theta \to \pm\infty} S_2(\theta) = 1 \right)$$

$$\delta(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left\{ \frac{\ln S_2(z)}{\sh(z-\theta)} - \frac{\ln S_2(z+i\pi)}{\sh(z+i\pi-\theta)} \right\}$$

Soit encore

$$\delta(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\ln \{ S_2(z)\, S_2(i\pi+z) \}}{\sh(z-\theta)} \qquad (2.38)$$

et $S_2(\theta)\, S_2(i\pi+\theta) = \Delta(\theta)$ est connu. Les formules de Malmsten [22] permettent alors de calculer $\delta(\theta)$ et donc $S_2(\theta)$

On obtient

$$S_2(\theta) = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{4\pi^2}{\gamma}\right) \sh\left(\frac{4\pi\theta}{\gamma}\right) \sh\left(\frac{4\pi(i\pi-\theta)}{\gamma}\right) U(\theta) \qquad (2.39)$$

$$U(\theta) = \Gamma\left(\frac{8\pi}{\gamma}\right) \Gamma\left(1 + i\frac{8\pi}{\gamma}\right) \Gamma\left(1 - \frac{8\pi}{\gamma} - i\frac{8\theta}{\gamma}\right) \times \qquad (2.40)$$

$$\times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(\theta)\, R_n(i\pi-\theta)}{R_n(0)\, R_n(i\pi)}$$

et

$$R_n(\theta) = \frac{\Gamma\left(2n\frac{8\pi}{\gamma} + i\frac{8\theta}{\gamma}\right)\Gamma\left(1+2n\frac{8\pi}{\gamma} + i\frac{8\theta}{\gamma}\right)}{\Gamma\left((2n+1)\frac{8\pi}{\gamma} + i\frac{8\theta}{\gamma}\right)\Gamma\left(1+(2n-1)\frac{8\pi}{\gamma} + i\frac{8\theta}{\gamma}\right)} \qquad (2.41)$$

dans le cas $N \geqslant 3$ on a deux solutions minimales possibles qui s'écrivent

$$S_2'^{(\pm)}(\theta) = Q^{(\pm)}(\theta)\, Q^{(\pm)}(i\pi - \theta) \qquad (2.42)$$

avec

$$Q^{(\pm)}(\theta) = \frac{\Gamma\left(\pm\frac{\lambda}{2\pi} - i\frac{\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{\theta}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\lambda}{2\pi} - i\frac{\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(-i\frac{\theta}{2\pi}\right)} \qquad (2.43)$$

et l'on a

$$S_2'^{(-)}(\theta) = \frac{\sinh\theta + i\sin\lambda}{\sinh\theta - i\sin\lambda}\, S_2'^{(+)}(\theta) \qquad (2.44)$$

Bien entendu ceci donne des solutions ayant des singularités sur l'axe imaginaire en θ uniquement (et en dehors de D), c'est-à-dire des solutions de matrices S physiques.

On montre [16] que la solution minimale pour N = 2 correspond à la matrice S exacte pour les solitons dans le modèle de Sine-Gordon. De plus pour $N \geqslant 3$, $S_2'^{(+)}$ et $S_2'^{(-)}$ donnent les matrices S exactes du modèle σ non linéaire à symétrie O(N) et du modèle de Gross-Neveu pour les fermions respectivement. Remarquons enfin que cette approche si elle fournit des solutions exactes de matrice S ne garantit pas à priori qu'il existe une théorie des champs (locale ou non) correspondante.

3) Les modèles statistiques sur réseaux Z invariants

Nous avons pu voir que les équations de factorisation écrites pour l'amplitude ($2 \to 2$) de la matrice S jouaient un rôle essentiel dans la résolution exacte du cas à symétrie O(N). Dans cette section nous allons examiner l'application de ces équations à la Mécanique

Statistique.

Considérons tout d'abord le cas bidimensionnel suivant :

Soit un réseau plan quelconque formé de (n) lignes (la), a = 1, 2,..., n, et tel que l'on ait $\frac{n(n-1)}{2}$ *intersections distinctes de ces droites dans le cas générique. Soit enfin l'équation dans le plan euclidien d'une ligne (la) :*

$$X^2 \sin \alpha_a - X^1 \cos \alpha_a = \xi_a \qquad (2.45)$$

où (X^1, X^2) *sont les coordonnées euclidiennes,* α_a *la pente de la droite et* ξ_a *la distance de la droite à l'origine.*

Soit $\theta_a = i\alpha_a$ (θ_a *est donc imaginaire pur*) ; *attachons à chaque intersection* V_{ab} *de deux lignes (la) et (lb) la matrice* $S^{(1)}(\theta_{ab})$ *décrivant le processus* $(2 \to 2)$ *vérifiant une équation du type équation triangulaire.*

$S^{(1)}(\theta_{ab})$ *jouera le rôle de poids statistique attaché au vertex que l'on pourra de plus identifier par les quatre indices (i, j, k, l) (figure 4)*

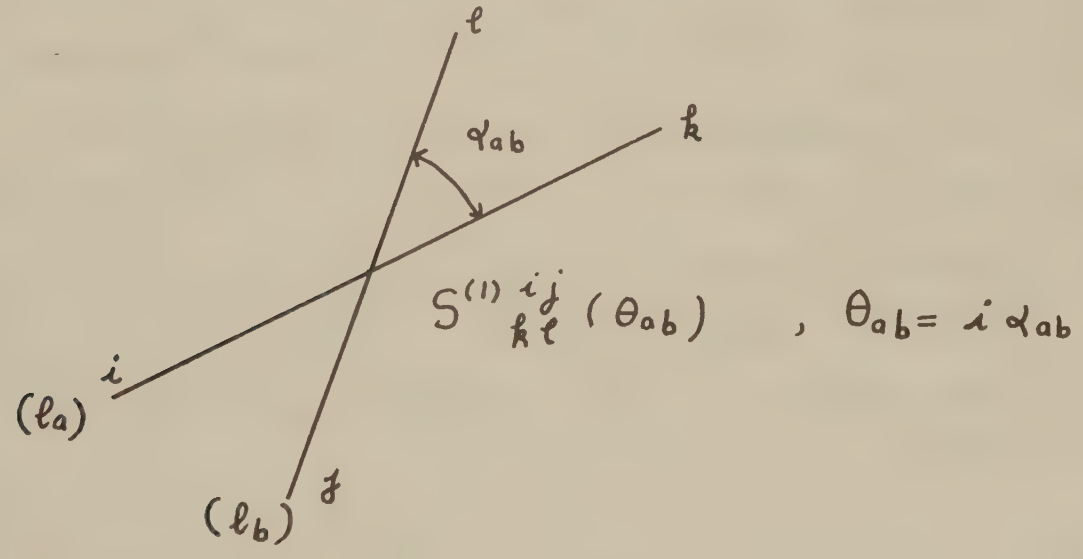


Figure 4

Remarquons que θ *est imaginaire pur, et donc* $S^{(1)}(\theta)$ *est réelle (condition d'analyticité réelle). De plus, l'ambiguité existante dans la*

définition de l'angle entre les droites (la) et (lb) est levée grâce à la relation (2.18) :

$$S^{(1)\,ij}_{\;\;kl}(i\alpha) = S^{(1)\,il}_{\;\;kj}(i\pi - i\alpha) \qquad (2.46)$$

Par définition la fonction de partition de ce système statistique est égale au produit de tous les poids statistiques attachés à chaque vertex (V_{ab}), sommé sur toutes les configurations de couleur (i, j, k, l) possibles.

Si nous imposons de plus des conditions aux limites périodiques, on peut exprimer la fonction de partition $Z\{\{\alpha_a\}, \{\mathfrak{z}_a\}\}$ du système en fonction de la matrice S totale associée à une matrice à deux particules $S^{(1)}$ donnée.

On obtient

$$Z\{\{\alpha_a\}, \{\mathfrak{z}_a\}\} = S^{i_1 \ldots i_n}_{i_1 \ldots i_n}(i\alpha_1, \ldots, i\alpha_n) \qquad (2.47)$$

Les variables $(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ n'apparaissent pas dans le membre de droite car $S^{(1)}$ vérifie une équation de factorisation (2.11). Il en résulte que la fonction de partition ne dépend pas des variables $\{\mathfrak{z}_a\}$ c'est-à-dire qu'elle est invariante par déplacement parallèle des lignes du réseau précédemment décrit (ceci est l'analogue des diagrammes de diffusion à n particules, voir figures 1 et 2). La fonction de partition sera dite Z -invariante. Comme cas particulier on obtient les réseaux réguliers à L lignes et M colonnes respectivement parallèles, faisant entre elles un angle α et dont les paramètres $\mathfrak{z}_a$ forment des suites arithmétiques (fig. 5)

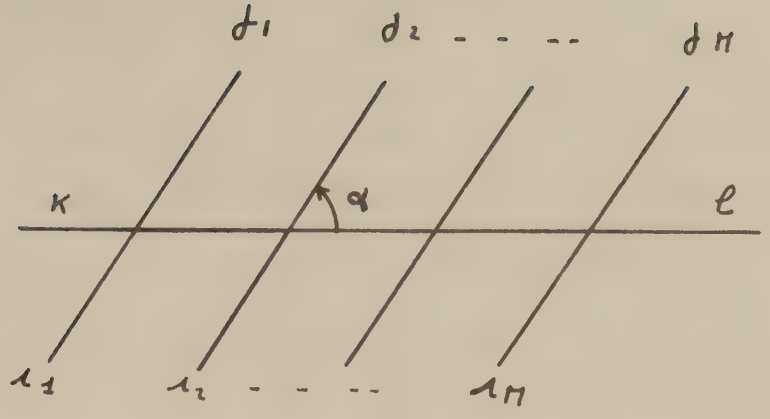


Figure 5

La matrice de transfert pour un tel réseau s'écrit

$$T^{\ell\ \{j\}}_{k\ \{i\}}(\alpha) = S^{(1)\,k_1 j_1}_{k\, i_1}(i\alpha)\, S^{(1)\,k_2 j_2}_{k_1 i_2}(i\alpha) \dots S^{(1)\,\ell\, j_n}_{k_{n-1} i_n}(i\alpha) \qquad (2.48)$$

avec sommation sur les indices répétés $(k_1 \dots k_{n-1})$

Les indices $\{j\}$ et $\{i\}$ sont les indices opératoriels de $T^{\ell}_{k}(\alpha)$. En utilisant l'équation triangulaire (2.11) vérifiée par $S^{(1)}$, on peut montrer

$$S^{(1)\,qq'}_{kk'}(i\alpha - i\alpha')\, T^{\ell}_{q}(\alpha')\, T^{\ell'}_{q'}(\alpha) =$$

$$= T^{q'}_{k'}(\alpha)\, T^{q}_{k}(\alpha')\, S^{(1)\,\ell\ell'}_{qq'}(i\alpha - i\alpha') \qquad (2.49)$$

Et donc en multipliant l'expression précédente par $S^{(1)\,kk'}_{\ell\ell'}(i\alpha - i\alpha')$ et en sommant sur les indices k , k' , ℓ, ℓ', on obtient

$$T(\alpha)\, T(\alpha') = T(\alpha')\, T(\alpha) \qquad (2.50)$$

où $T(\alpha) = T^{k}_{k}(\alpha)$ désigne la trace de l'opérateur $T^{k}_{\ell}(\alpha)$.

Un exemple célèbre d'un tel système est le modèle de Baxter à 8 vertex pour un réseau régulier [10] ainsi que sa généralisation à un réseau totalement irrégulier [10].

Nous en donnons ici une rapide description.

Considérons un réseau rectangulaire régulier de N colonnes et M lignes (fig. 6) :

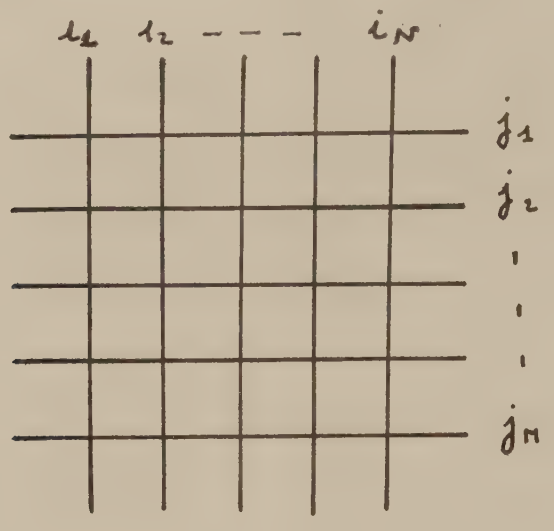


Figure 6

Attachons à chaque lien joignant deux vertex quelconques une variable de "spin" $\sigma = \pm 1$. La donnée de toutes les couleurs de σ pour l'ensemble des liens détermine l'état du réseau. Considérons un vertex quelconque ; en général, il existe 2^4 configurations possibles pour les variables $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ attachées aux vertex (fig. 7)

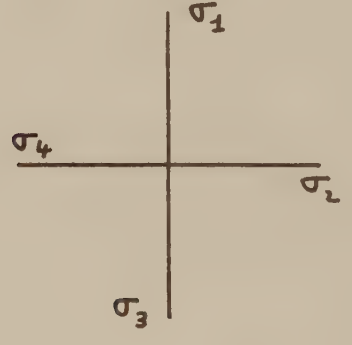


Figure 7

A chaque vertex $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ nous attachons le poids statistique $\mathcal{R}^{\sigma_3\,\sigma_4}_{\sigma_1\,\sigma_2}$ (quantité réelle, positive ou nulle). La fonction de partition est alors égale à la somme sur tous les états possi-

bles du produit des poids statistiques $\mathcal{R}^{\sigma_3\,\sigma_4}_{\sigma_1\,\sigma_2}$ des N x M vertex. On considérera de plus que les conditions aux limites sont périodiques (réseau torique). Le modèle à 8 vertex correspond au choix suivant pour les composantes de la matrice R des poids statistiques :

$$\begin{aligned} R^{-+}_{+-} &= R^{+-}_{-+} = a \\ R^{++}_{--} &= R^{--}_{++} = b \\ R^{++}_{++} &= R^{--}_{--} = c \\ R^{+-}_{+-} &= R^{-+}_{-+} = d \end{aligned} \qquad (2.51)$$

avec a, b, c, d, réels, positifs. Les autres composantes s'annulent. De nombreux systèmes statistiques sur réseaux sont des cas particuliers de ce modèle.

Les propriétés statistiques du modèle ne dépendent que des rapports entre les quantités a, b, c, d. Si on impose que la matrice R satisfasse une équation du type équation de factorisation, on obtient des équations fonctionnelles pour les quantités (a, b, c, d).

Dans le cas d'un réseau régulier rectangulaire, la solution la plus générale peut s'écrire [10] :

$$\begin{aligned} a &= h\ \Theta(2\eta)\ \Theta(\eta-\nu)\ H(\eta+\nu) \\ b &= h\ \Theta(2\eta)\ H(\eta-\nu)\ \Theta(\eta+\nu) \\ c &= h\ H(2\eta)\ \Theta(\eta-\nu)\ \Theta(\eta+\nu) \\ d &= h\ H(2\eta)\ H(\eta-\nu)\ H(\eta+\nu) \end{aligned} \qquad (2.52)$$

avec Θ et H des fonctions thêta elliptiques de module k [23]
h est défini par C = 1 pour $\nu = \eta$, soit

$$h = \{\Theta(0)\ \Theta(2\eta)\ H(2\eta)\}^{-1} \qquad (2.53)$$

La matrice de transfert est donnée par l'expression

$$T^{\{\sigma'\}}_{\{\sigma\}} = R^{\sigma'_1\,\nu_2}_{\sigma_1\,\nu_1} \cdots\cdots R^{\sigma'_N\,\nu_1}_{\sigma_N\,\nu_N} \qquad (2.54)$$

où $\{\sigma'\} = \{\sigma'_1, \ldots, \sigma'_N\}$ et $\{\sigma\} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_N\}$ sont les indices opératoriels de T' ; il y a de plus sommation sur les indices répétés $\mu_i = \pm 1$.

La fonction de partition s'écrit

$$Z = Tr(T'^M) \tag{2.55}$$

A η et k fixés la matrice de transfert T' est fonction de υ uniquement et la relation (2.50) est vérifiée.

C'est-à-dire que pour tous (υ, υ') nous avons

$$T'(\upsilon)T'(\upsilon') = T'(\upsilon')T'(\upsilon) \tag{2.56}$$

On peut également généraliser ce modèle au cas d'un réseau irrégulier tout à fait analogue aux réseaux à matrice S décrit précédemment. Si nous attachons à chaque vertex (V_{ab}) un poids statistique $\left(R^{\sigma_3\sigma_4}_{\sigma_1\sigma_2}\right)_{ab}$ défini par les relations (2.52) et (2.53) la condition de Z -invariance du réseau impose que R satisfasse une équation du type équation de factorisation, on obtient alors les conditions

(i) les valeurs de k et η sont les mêmes pour tous les vertex résultant de l'intersection de deux droites (ℓa) et (ℓb).

(ii) Pour chaque vertex V_{ab} la valeur du paramètre $\upsilon = \upsilon_{ab}$ est reliée à l'angle α_{ab} entre les lignes (ℓa) et (ℓb) par la relation [10]

$$\upsilon_{ab} = \frac{2\eta}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{ab}\right) \tag{2.57}$$

Remarquons que le choix α_{ab} ou $\pi - \alpha_{ab}$ n'affecte pas la définition car les relations (2.52) assurent

$$R^{\sigma_3\sigma_4}_{\sigma_1\sigma_2}(\alpha_{ab}) = R^{\sigma_3\sigma_2}_{\sigma_1\sigma_4}(\pi - \alpha_{ab}) \tag{2.58}$$

qui est l'analogue de la symétrie de croisement.

Nous allons à présent examiner les conséquences des relations du type (2.50) ou (2.56). En effet, les vecteurs propres de l'opérateur $T(\alpha)$ sont indépendants de α et on peut espérer diagonaliser $T(\alpha)$ simultanément pour toute valeur de α. De plus l'opérateur $T(\alpha)$ joue le même rôle en Mécanique Statistique que l'opérateur d'évolution en Théorie des Champs.

Si l'on considère la quantité $\mathrm{Log}\, T(\alpha)$ et son développement en puissance de α autour du point $\alpha = 0$, la relation (2.50) assure que tous les coefficients du développement commutent. On peut de plus obtenir un hamiltonien quantique (en une dimension d'espace) défini par la relation

$$H = \frac{d}{d\alpha} \mathrm{Log}\, T(\alpha)\Big|_{\alpha=0} \qquad (2.61)$$

Il résulte de cette définition que le système physique associé (en dimension $d = 1 + 1$ d'espace temps) possède une infinité de courants conservés (les dérivés successives de $\mathrm{Log}\, T(\alpha)$ en $\alpha = 0$). La relation (2.50) (ou (2.56)) apparaît donc comme l'analogue pour la Mécanique Statistique de la condition de complète intégrabilité. Signalons enfin que la relation (2.49) pour la matrice de monodromie $T_{\ell}^{\kappa}\begin{Bmatrix} i \\ j \end{Bmatrix}$ joue un rôle fondamental dans la méthode Quantique Inverse utilisée dans la résolution exacte de certains modèles statistiques (à vertex ou à spins) [13] ou de Théorie des Champs (Sine-Gordon) [12].

Les équations triangulaires ont récemment suscité une autre direction de recherche : le passage à des dimensions supérieures à deux, et en particulier $d = 2 + 1$ [17]. Dans ce dernier cas on peut également considérer le problème du point de vue de la Théorie des Champs ou de la Mécanique Statistique.

Pour la Théorie des Champs, on envisage les interactions entre des lignes droites se mouvant dans un plan (fig. 8)

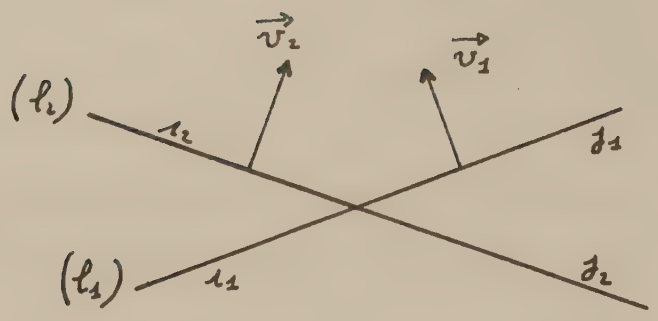


Figure 8

où chaque intersection de deux droites ℓ_1 et ℓ_2 détermine des couleurs (i_1, j_1), (i_2, j_2) qui définissent différentes régions sur chaque droite. L'interaction agit sur les couleurs des différents domaines. Ainsi la diffusion de deux droites est triviale, et la matrice S élémentaire est celle à trois corps. La condition de factorisabilité conduit également ici à des équations de factorisation dites équations tétrahédriques [17]. La contrepartie de ce modèle pour la Mécanique Statistique est constituée par un réseau tridimensionnel formé des intersections n de plans (soit $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ intersections) qui sont les lignes d'univers (euclidiennes) des droites précédentes. A chaque vertex (intersection de trois plans) on attache la matrice S élémentaire précédente vérifiant des équations tétrahédriques, qui jouera le rôle de poids statistique. La fonction de partition d'un tel réseau sera alors Z -invariante, c'est-à-dire restera inchangée si on translate de manière parallèle un des plans quelconques du réseau. Notons que pour l'instant aucune solution générale avec poids positifs ou nuls n'a été trouvée. Néanmoins cette voie semble prometteuse.

Comme nous pouvons le voir, les équations de factorisation jouent un rôle central dans l'élaboration et la résolution des modèles de Théorie des Champs ou de Mécanique Statistique solubles.

CHAPITRE III

La Méthode du Problème Inverse Classique

Dans le chapitre précédent nous avons vu l'intérêt que peuvent avoir les modèles quantiques complètement intégrables, tant pour la physique des particules (matrices S factorisables) que pour la mécanique statistique (fonctions de partitions factorisables). Le problème de l'obtention de tels modèles se pose donc.

Nous allons examiner celui-ci dans le cadre de la théorie des champs. En effet, si une théorie quantique des champs possède une matrice S factorisable, alors cette propriété sera vérifiée au niveau classique. Or nous savons [18] que les modèles possédant une infinité de lois de conservations (classique) possède la propriété de factorisabilité de la matrice S (classique). Il est donc intéressant d'obtenir de tels modèles. Il s'avère que les modèles solubles par la méthode du problème inverse classique exhibent une infinité de quantités non triviales conservées. Nous allons donc examiner dans ce chapitre la méthode du problème inverse ainsi que les procédés d'obtentions de théories des champs solubles par cette procédure. Nous illustrerons l'ensemble de la méthode en prenant l'exemple du modèle Complex Sine-Gordon.

1 - La méthode générale

Considérons une équation différentielle non linéaire (par exemple une équation de champs) de la forme $K(\phi) = 0$ où K est un opérateur différentiel (a priori non linéaire). La méthode du problème inverse consiste à associer (lorsque cela est possible) à l'équation précédente un problème aux valeurs propres linéaire

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi(x,t) = L \chi(x,t) \qquad (3.1)$$

et à remplacer le champ $\phi(x,t)$ solution de l'équation $K(\phi) = 0$ par les paramètres spectraux du problème de diffusion associé à L.

Les vecteurs propres χ de l'opérateur linéaire L (qui dépend de ϕ) dépendent du temps. Supposons qu'il existe un opérateur B linéaire (fonction de ϕ) tel que

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi(x,t) = B\chi(x,t) \qquad (3.2)$$

L'équation de compatibilité des deux systèmes linéaires associés à L et B respectivement est alors $K(\phi) = 0$. On appelle (L, B) la paire de Lax [24] du système. On a alors la relation (équation de compatibilité)

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial x} + [L, B] = 0 \qquad (3.3)$$

Dans le cas où ϕ a une dépendance de la forme $\phi = \phi(x,t)$ la résolution de l'équation différentielle non linéaire considérée peut s'effectuer par une succession de calculs <u>linéaires</u>. C'est-à-dire qu'étant donné la fonction $\phi(x,0)$ on peut calculer $\phi(x,t)$ pour t quelconque de la manière suivante.

- <u>Le problème direct</u>

$\phi(x,0)$ étant connu, on peut résoudre le problème de diffusion associé à L, c'est-à-dire trouver les paramètres spectraux de L. On appelle données de diffusion l'ensemble $\{ N, \kappa_n, c_n, n = 1, \ldots, N, R(k), T(k) \}$ avec $0 \leq k < \infty$ et $t = 0$ fixé.

N est le nombre d'états liés, κ_n est la valeur propre de l'état n et c_n une constante caractéristique des états asymptotiques $x \to \pm\infty$ $R(k)$ et $T(k)$ sont les coefficients de réflexion et de transmission respectivement associés au spectre continu $k \geq 0$

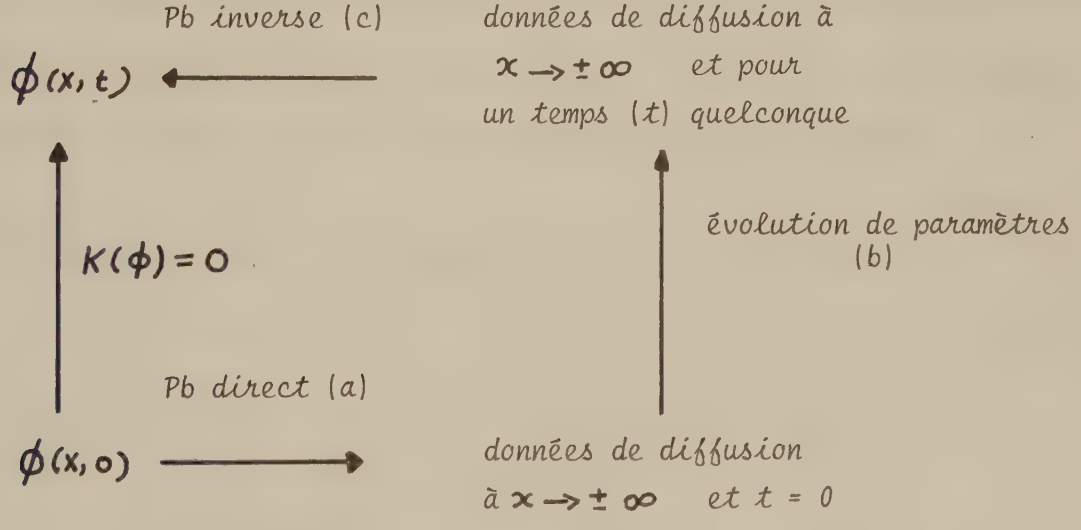
L'évolution des paramètres

Pour connaître l'évolution des données de diffusion, il suffit de connaître l'évolution des fonctions propres $\chi(x,t)$ pour $x \to \pm\infty$ Donc, en utilisant l'équation $\frac{\partial \chi}{\partial t} = B\chi$ dans sa forme asymptotique (pour $x \to \pm\infty$) on peut calculer cette évolution dans le temps.

Le problème inverse

Connaissant les données de diffusion de L à tout instant t on peut reconstruire le "potentiel" correspondant $\phi(x,t)$. C'est l'étape cruciale du problème. La solution n'est unique que dans le cas d'un paramètre d'espace. La résolution repose sur une équation du type Gelfand-Levitan (Marchenho) [4] (Nous allons examiner dans une section suivante un exemple explicite de l'ensemble de la méthode).

On peut à présent schématiser la procédure décrite ici de la manière suivante :



Notons enfin une conséquence très importante de cette méthode pour la théorie (classique) des champs. Considérons un modèle décrit par un hamiltonien $H\{\phi(x), \pi(x)\}$ soluble par la méthode du problème inverse.

Alors on peut définir une transformation canonique

$$\begin{pmatrix} \phi(x) \\ \pi(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} q_n\,, n=1,\dots,N\ ;\ q(k)\ ,\ k\geqslant 0 \\ p_n\,, n=1,\dots,N;\ p(k)\ ,\ k\geqslant 0 \end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

telle que le hamiltonien devienne une fonction des $(p_n, p(k))$ uniquement et soit donc trivialement intégrable.

$$H\{\phi(x), \pi(x)\} \longrightarrow H\{p_n, p(k)\}$$

Le modèle considéré sera alors dit complètement intégrable par la méthode du problème inverse. La généralisation de cette procédure au niveau quantique a été construite par Faddeev et al [11] pour divers modèles (Sine-Gordon, Schrödinger non linéaire).

Remarquons enfin que cette méthode n'est utilisable que pour des théories très particulières, pour lesquelles il existe deux opérateurs linéaires L et B tels que l'équation du mouvement (du modèle considéré) soit justement la condition de compatibilité des systèmes linéaires associés à L et B (3.3).

Ablowitz et al [6] ont recherché ces opérateurs sous la forme suivante (AKNS)

$$L = \begin{bmatrix} i\frac{d}{dx} & -iq \\ ir & -i\frac{d}{dx} \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \quad L\chi = k\chi \qquad (3.5)$$

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B = -i \begin{bmatrix} a(x,t,k) & b(x,t,k) \\ c(x,t,k) & -a(x,t,k) \end{bmatrix} \qquad (3.6)$$

$$\text{et } \frac{\partial \chi}{\partial t} = B\chi$$

Les équations de compatibilité s'écrivent $\frac{\partial L}{\partial t} = [B, L]$ (3.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} &= qc - rb \\ \frac{\partial b}{\partial x} + 2ikb &= i\frac{\partial q}{\partial t} - 2aq \\ \frac{\partial c}{\partial x} - 2ikc &= i\frac{\partial r}{\partial t} + 2ar \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Les auteurs montrent alors que par le choix des divers coefficients on obtient une large classe d'équations non linéaires. Par exemple si on impose $a = 4k^3 + 2qrk + irq_x - iqr_x$

on obtient $\begin{cases} q_t - 6rqq_x + q_{xxx} = 0 \\ r_t - 6qrr_x + r_{xxx} = 0 \end{cases}$

qui se réduit pour $r = -1$ à l'équation de Korteweg-de Vries [3] (KdV) et pour $r = \pm q$ à l'équation KdV modifiée.

Si on choisit par exemple $a = 2k^2 + rq$, on obtient

$$\begin{cases} iq_t + q_{xx} - 2q^2r = 0 \\ ir_t - r_{xx} + 2q^2r = 0 \end{cases}$$

Ce système se réduit pour $r = \pm q^*$ à l'équation de Schrödinger

non linéaire.

Le choix $a = \frac{-1}{4k} \cos\phi$ et $r = -q = \frac{1}{2}\phi_x$ nous donne l'équation de Sine-Gordon $\phi_{xt} = \sin\phi$

Signalons enfin un modèle que nous allons étudier plus en détail par la suite, et qui appartient aussi à cette classe de modèles (AKNS) : le modèle Complex-Sine-Gordon (CSG).

En variables cône de lumière $x = \frac{1}{2}(x^0 + x^1)$, $t = \frac{1}{2}(x^0 - x^1)$

$$L = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{d}{dx} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ \varphi^* & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad L\chi = \frac{i}{2\gamma}\chi$$

où $$\varphi = \left(\alpha_x + i\beta_x \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\omega} \tag{3.9}$$

et ω vérifie $\omega_x = \dfrac{\beta_x \cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, $\omega_t = \dfrac{\beta_t}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

Soit B tel que $\dfrac{\partial\chi}{\partial t} = B\chi$

$$B = \frac{-\gamma}{2}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\, e^{i\omega} \\ \sin\alpha\, e^{-i\omega} & -\cos\alpha \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

(α, β) sont les variables de champs et γ un paramètre libre.

Les équations du mouvement pour (α, β) s'écrivent

$$\alpha_{xt} + \sin\alpha - \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\beta_x\beta_t = 0 \tag{3.11a}$$

$$\beta_{xt} + \frac{1}{\sin\alpha}\left(\alpha_x\beta_t + \alpha_t\beta_x\right) = 0 \tag{3.11b}$$

Ces équations dérivent du lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\alpha_x\alpha_t + \frac{1}{2}\,tg^2\frac{\alpha}{2}\,\beta_x\beta_t + \cos\alpha - 1 \qquad (3.12)$$

ou encore en variables $\vec{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2)$

$$\Psi_1 = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} \quad \text{et} \quad \Psi_2 = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left\{\frac{(\partial_\mu\vec{\Psi})^2}{1-\vec{\Psi}^2} - \vec{\Psi}^2\right\} \qquad (3.13)$$

Il est remarquable que les équations non linéaires engendrées par cette méthode aient été initialement obtenues pour une assez grande variété de propagations d'ondes dans des milieux à la fois dissipatifs et non linéaires. Une autre caractéristique de ces milieux est d'autoriser la propagation d'onde "Soliton" qui sont des solutions exactes des différentes équations considérées.

KdV ⟶ ondes magnétohydrodynamiques dans un plasma [25] ondes acoustiques dans les plasmas [26] , ondes longitudinales avec dispersion le long d'une tige élastique [27], etc...

Schrödinger non linéaire ⟶ propagation d'une onde de chaleur dans un solide [28] , ondes de Languemuir dans les plasmas [29] , etc...

La méthode du problème inverse permet de résoudre de telles équations, nous allons détailler la procédure employée dans le cas particulier du modèle Complex-Sine-Gordon.

2 - Le modèle CSG

Tout d'abord nous allons examiner les origines du modèle. Puis nous appliquerons la méthode du problème inverse et nous dériverons la solution à un soliton correspondant aux équations du mouvement.

a) Les origines du modèle

le modèle σ -non linéaire

On considère le lagrangien

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\sigma})^2 + \frac{1}{2} \lambda (\vec{\sigma}^2 - 1) \qquad (3.14)$$

avec $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$

$$\partial_\mu \vec{\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \vec{\sigma}(x) \qquad \text{et} \qquad \vec{p} \cdot \vec{q} = \sum_{i=1}^{N} p_i q_i$$

Le paramètre de Lagrange $\lambda(x)$ permet de restreindre le champ sur la sphère unité de R^N, soit S_{N-1}. C'est le cas le plus simple d'un modèle de champ libre, non massif dont la contrainte géométrique $\vec{\sigma}^2 = 1$ génère l'interaction.

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\Box \vec{\sigma} + (\partial_\mu \vec{\sigma})^2 \vec{\sigma} = 0 \qquad (3.15a)$$

$$\lambda + (\partial_\mu \vec{\sigma})^2 = 0 \qquad (3.15b)$$

avec $\Box = \partial_0^2 - \partial_1^2$

Si on introduit les coordonnées cône de lumière

$$x = \frac{1}{2}\left(X^0 + X^1\right) \quad ; \quad t = \frac{1}{2}\left(X^0 - X^1\right) \tag{3.16}$$

et la notation $\vec{\sigma}_x = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\sigma}$, $\vec{\sigma}_t = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\sigma}$ on obtient :

$$\vec{\sigma}_{xt} + \left(\vec{\sigma}_x . \vec{\sigma}_t\right).\vec{\sigma} = 0 \quad , \vec{\sigma} \in S_{N-1} \tag{3.17}$$

Ces équations sont invariantes par le changement des coordonnées

$(x, t) \longrightarrow (x', t')$ avec

$$dx' = |H(x)|\, dx$$

$$dt' = |K(t)|\, dt \tag{3.18}$$

avec $H(x) \neq 0$ et $K(t) \neq 0$ (Invariance conforme)

De plus la conservation du tenseur impulsion énergie implique

$$\left\{\frac{1}{2}\vec{\sigma}_x^{\,2}\right\}_t = 0 \quad ; \quad \left\{\frac{1}{2}\vec{\sigma}_t^{\,2}\right\}_x = 0 \tag{3.19}$$

donc $\vec{\sigma}_x^{\,2}$ et $\vec{\sigma}_t^{\,2}$ sont fonctions uniquement de x et de t respectivement.

$$\vec{\sigma}_x^{\,2} = h^2(x) \qquad \vec{\sigma}_t^{\,2} = k^2(t) \tag{3.20}$$

Faisons le choix $|H(x)| = |h(x)| \; ; \; |K(t)| = |k(t)|$ (3.21)

on obtient

$$\vec{\sigma}^2 \equiv 1 \quad , \quad \vec{\sigma}_x^2 \equiv 1 \quad , \quad \vec{\sigma}_t^2 \equiv 1 \tag{3.22}$$

dans le nouveau système de variables (on a fixé l'invariance conforme). Notons que les conditions aux limites pour le champ sont inhabituelles $\vec{\sigma}$ et ses dérivées ne s'annulent pas à l'infini. Nous avons de plus :

$$(\vec{\sigma} . \vec{\sigma}_t) = 0 \qquad (\vec{\sigma} . \vec{\sigma}_t) = 0 \tag{3.23}$$

Considérons l'invariant :

$\alpha = \arccos (\vec{\sigma}_t . \vec{\sigma}_x)$ (on a d'après 3.22 $|\vec{\sigma}_x . \vec{\sigma}_t| \leq 1$)

On peut alors dériver une équation du mouvement pour α [30]

$$\alpha_{xt} = - \left\{ \frac{(\vec{\sigma}_x . \vec{\sigma}_t)_x}{\sin\alpha} \right\}_t = - \left\{ \frac{(\vec{\sigma}_{xx} . \vec{\sigma}_t)}{\sin\alpha} \right\}_t$$

soit

$$\alpha_{xt} = - \left\{ \frac{(\vec{\sigma}_{xx} . \vec{\sigma}_{tt})}{\sin\alpha} \right\} + \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} (\vec{\sigma}_{xx} . \vec{\sigma}_t) \alpha_t +$$

$$+ \left\{ - \frac{(\vec{\sigma}_{xxt} . \vec{\sigma}_t)}{\sin\alpha} \right\} \tag{3.24}$$

Il nous faut donc déterminer $\vec{\sigma}_{xx}$, $\vec{\sigma}_{tt}$

Dans le cas $N = 3$ $(\vec{\sigma}, \vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_t)$ forment une base de l'espace et on peut décomposer $\vec{\sigma}_{xx}$, $\vec{\sigma}_{tt}$ sur cette base.

Pour $N = 4$ on introduit le vecteur unitaire $\frac{\vec{w}}{\sin\alpha}$ où

$$w_a = \varepsilon_{abcd} \, \sigma^b \, \sigma_x^c \, \sigma_t^d$$ (produit vectoriel)

On a alors $\vec{w}.\vec{\sigma} = \vec{w}.\vec{\sigma}_x = \vec{w}.\vec{\sigma}_t = 0$

posons $u = \dfrac{\vec{\sigma}_{xx}.\vec{w}}{\sin\alpha}$ $\qquad v = \dfrac{\vec{\sigma}_{tt}.\vec{w}}{\sin\alpha}$ (3.25)

On obtient

$$\vec{\sigma}_{xx} = -\vec{\sigma} + \alpha_x \cot g\alpha\, \vec{\sigma}_x - \frac{\alpha_x}{\sin\alpha}\vec{\sigma}_t + \frac{u}{\sin\alpha}\vec{w} \qquad (3.26)$$

$$\vec{\sigma}_{tt} = -\vec{\sigma} - \frac{\alpha_t}{\sin\alpha}\vec{\sigma}_x + \alpha_t \cot g\alpha\, \vec{\sigma}_t + \frac{v}{\sin\alpha}\vec{w}$$

$(N=3 \rightarrow u = v = 0)$

On a donc

$$\alpha_{xt} + \sin\alpha + \frac{uv}{\sin\alpha} = 0 \qquad (3.27a)$$

$$u_t = \frac{\alpha_x}{\sin\alpha}.v \qquad v_x = \frac{\alpha_t}{\sin\alpha}.u \qquad (3.27b)$$

Soit après intégration

$$u = \beta_x \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \qquad v = -\beta_t \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Les équations (couplées) pour α et β s'écrivent

$$\alpha_{xt} - \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\beta_x\beta_t + \sin\alpha = 0 \qquad (3.28a)$$

$$\beta_{xt} + \frac{\alpha_x\beta_t + \alpha_t\beta_x}{\sin\alpha} = 0 \qquad (3.28b)$$

Ces équations dérivent du lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\alpha_x\alpha_t + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\beta_x\beta_t + \cos\alpha - 1 \qquad (3.29)$$

$N = 3$, $\beta = 0$ et on obtient le lagrangien Sine-Gordon (SG)

$N = 4$, on obtient le modèle Complex-Sine-Gordon (CSG)

Cette méthode (dite procédure de réduction) permet de construire de nouveaux modèles intégrables. En effet les équations du mouvement obtenues pour des champs à $(N-2)$ composants scalaires sont invariantes sous des familles de transformation de Backlung T_γ , $\gamma \in \mathbb{R}$. Pour Sine-Gordon par exemple $\alpha \xrightarrow{T_\gamma} \alpha(\cdot,\gamma)$ avec $\alpha(\cdot,\gamma)$ encore solution de l'équation ;

$$T_\gamma \begin{cases} \frac{1}{2}\{\alpha(\cdot,\gamma)+\alpha\}_x = \gamma^{-1}\sin\{\frac{1}{2}(\alpha(\cdot,\gamma)-\alpha)\} \\ \frac{1}{2}\{\alpha(\cdot,\gamma)-\alpha\}_t = -\gamma\sin\{\frac{1}{2}(\alpha(\cdot,\gamma)+\alpha)\} \end{cases}$$

où γ est un paramètre libre.

On obtient alors les lois de conservation :

$$\gamma\left\{\cos\frac{\alpha(\cdot,\gamma)+\alpha}{2}\right\}_x + \gamma^{-1}\left\{\cos\frac{\alpha(\cdot,\gamma)-\alpha}{2}\right\}_t = 0$$

Si on développe $\alpha(\cdot,\gamma)$ en puissance de γ autour du point $\gamma = 0$ on obtient une infinité de quantités conservées. On obtient également la paire de Lax (L.B.) du système considéré [30] .

Plongement de surfaces

Le modèle Complex Sine-Gordon (et Sine-Gordon) est également relié au problème du plongement d'une surface riemanienne V_n , de dimension n dans un espace Euclidien de dimension $m > n$ (et en particulier $m = n+1$ lorsque cela est possible) [31]

Dans V_n on définit la métrique $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ avec $i, j = 1, \ldots, n$.

On peut plonger V_n dans l'espace euclidien E_{n+1} si la surface V_n peut être définie par (n + 1) équations de la forme

$$y^\mu = y^\mu(x_1, \ldots, x_n) \quad , \mu = 1, \ldots, n+1 \tag{3.30}$$

et y^μ les coordonnées cartésiennes de E_{n+1}

La métrique s'écrit alors $g_{ij} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial y_\mu}{\partial x^j}$ (3.31)

Pour que V_n puisse être plongé dans E_{n+1}, il est nécessaire et suffisant que l'équation (3.31) admette (n + 1) solutions réelles indépendantes du type (3.30).

Les vecteurs $\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{y}}{\partial x^i}$ sont n vecteurs tangents à V_n et linéairement indépendants. Notons $\hat{\vec{v}}_{n+1}$ le vecteur unitaire orthogonal à V_n. Ces vecteurs satisferont les équations de Gauss et Weingarten :

$$\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial x^i} = \Gamma^\kappa{}_{ij}\, \vec{v}_\kappa + L_{ij}\, \hat{\vec{v}}_{n+1} \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial \hat{\vec{v}}_{n+1}}{\partial x^i} = - L_{\kappa i}\, g^{\kappa m}\, \vec{v}_m \tag{3.33}$$

On a donc un système linéaire pour $(\vec{v}_j, \hat{\vec{v}}_{n+1})$

L_{ij} est le tenseur de courbure intrinsèque (symétrique), qui peut être défini par (3.32). $\Gamma^\kappa{}_{ij}$ sont les symboles de Christoffel

$$\Gamma^\kappa{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{\kappa e} \left(- g_{ij,e} + g_{jl,i} + g_{li,j} \right)$$

où $g_{mn,p}$ désigne la quantité $\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^p}$

Considérons à présent $\hat{\vec{v}}_j$ les vecteurs unitaires dans la direction $\vec{v}_j$. Si les coordonnées x_i sont orthogonales on peut montrer que (3.32) et (3.33) s'écrivent :

$$\frac{\partial \hat{\vec{v}}_\nu}{\partial x^i} = A_{i,\mu}{}^{\nu}\, \hat{\vec{v}}_\nu \qquad (3.34)$$

où les A_i sont n matrices $((n+1) \times (n+1))$ antisymétriques.

$$A_{i,jk} = \frac{1}{2|\vec{v}_k||\vec{v}_j|}\left(\frac{\partial |\vec{v}_i|}{\partial x^j}\delta_{ik} - \frac{\partial |\vec{v}_i|}{\partial x^k}\delta_{ij} \right) \qquad (3.35)$$

(pas de sommation sur les indices répétés)

et $$A_{i,j\,n+1} = \frac{1}{|\vec{v}_j|} L_{ij} \qquad (3.36)$$

(Il n'est pas toujours possible de trouver des coordonnées orthogonales dans V_n mais ce sera le cas pour l'application à notre modèle). Les équations (3.32) et (3.33) sont surdéterminées, elles doivent satisfaire les conditions d'intégrabilité de Gauss-Codazzi :

$$R_{ijkl} = L_{ik}L_{jl} - L_{il}L_{jk} \qquad (3.37a)$$

$$L_{ij;k} = L_{ik,j} \qquad (3.37b)$$

(où $;k$ désigne la dérivée covariante dans V_n).

Considérons à présent le cas $n = 2$ avec

$$g_{11} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \qquad g_{10} = g_{01} = 0 \qquad g_{00} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$L_{00} - L_{11} = -2 \left(g_{00} g_{11} \right)^{1/2} \tag{3.38}$$

On obtient

$$\frac{\partial M}{\partial x^0} = \begin{bmatrix} 0 & +\frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial x^1} & -\frac{L_{00}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial x^1} & 0 & \frac{L_{01}}{\cos \alpha/2} \\ \frac{L_{00}}{\sin \frac{\alpha}{2}} & -\frac{L_{01}}{\cos \frac{\alpha}{2}} & 0 \end{bmatrix} M \tag{3.39a}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x^1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial x^0} & -\frac{L_{01}}{\sin \alpha/2} \\ +\frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial x^0} & 0 & \frac{L_{11}}{\cos \alpha/2} \\ \frac{L_{01}}{\sin \alpha/2} & -\frac{L_{11}}{\cos \alpha/2} & 0 \end{bmatrix} M \tag{3.39b}$$

où M est une matrice $M_{\mu\nu}$ de $SO(n)$ (vérifiant ici $M_{\mu\rho} M_{\rho\nu} = \delta_{\mu\nu}$) des vecteurs $\vec{v}_\mu$ mis en colonnes.

Les conditions de Gauss-Codazzi s'écrivent

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left(\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} L_{01} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \left(L_{00} + L_{11} \right) \right) \tag{3.40a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} L_{01} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(L_{00} + L_{11} \right) \right) \tag{3.40b}$$

Soit

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{0\,2}}\alpha - \frac{\partial^2}{\partial x^{1\,2}}\alpha + \sin\alpha = 4\,\frac{L_{01}^2 - \frac{1}{4}(L_{11}+L_{00})^2}{\sin\alpha} \qquad (3.41)$$

L'équation (3.40b) assure qu'il existe un champ β tel que

$$L_{01} = -\frac{1}{2}\,tg\,\frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial\beta}{\partial x^1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(L_{00}+L_{11}) = -\frac{1}{2}\,tg\,\frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial\beta}{\partial x^0}.$$

Remarquons que les équations (3.39a) et (3.39b) sont écrites avec des éléments M de $SO(3)$. Or $SO(3) \sim SU(2)$, on peut donc réécrire ces équations avec $v \in SU(2)$.

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,Tr\left(v\,\sigma_\mu\,v^+\,\sigma_\nu\right) \qquad (\sigma \text{ sont les matrices de Pauli})$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & -v_2^* \\ v_2 & v_1^* \end{pmatrix}, \quad |v_1|^2 + |v_2|^2 = 1$$

Effectuons une rotation $v \longrightarrow \exp\left(\frac{i}{2}\,\sigma_3\,\theta\right)$

avec $\theta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$ et changeons v_1, v_2 en :

$$v_1 \longrightarrow v_1 + i\,v_2$$

$$v_2 \longrightarrow v_1 - i\,v_2$$

On obtient en coordonnées cône de lumière [31]

$$\frac{\partial v}{\partial x} = i \begin{bmatrix} -1 - \frac{\cos\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{i}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{1}{2} tg\frac{\alpha}{2}\frac{\partial\beta}{\partial x} \\ -\frac{i}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{1}{2} tg\frac{\alpha}{2}\frac{\partial\beta}{\partial x} & 1 + \frac{\cos\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}\frac{\partial\beta}{\partial x} \end{bmatrix} v \quad (3.41a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = i \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\cos\alpha - \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}\frac{\partial\beta}{\partial t} & -\frac{1}{4}\sin\alpha \\ -\frac{1}{4}\sin\alpha & +\frac{1}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}\frac{\partial\beta}{\partial t} \end{bmatrix} v \quad (3.41b)$$

Les équations de compatibilité (Gauss-Codazzi) s'écrivent :

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial t} + \sin\alpha - \frac{tg^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\frac{\partial\beta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial t} = 0 \quad (3.42a)$$

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial t} + \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) = 0 \quad (3.42b)$$

qui sont les équations de champs pour Complex Sine-Gordon. Ces équations sont invariantes de Lorentz : elles gardent leur forme sous la transformation :

$$x \to \frac{1}{k}x \quad , \quad t \to kt$$

Le système linéaire (3.41a) et (3.41b) change alors

$$\frac{\partial v}{\partial x} = i \begin{bmatrix} -k - \frac{\cos\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}\frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{i}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{1}{2}tg\frac{\alpha}{2}\frac{\partial\beta}{\partial x} \\ -\frac{i}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{1}{2}tg\frac{\alpha}{2}\frac{\partial\beta}{\partial x} & k + \frac{\cos\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}\frac{\partial\beta}{\partial x} \end{bmatrix} v \quad (3.43a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = i \begin{bmatrix} -\frac{1}{4k}\cos\alpha - \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}\frac{\partial \beta}{\partial t} & -\frac{1}{4k}\sin\alpha \\ -\frac{1}{4k}\sin\alpha & \frac{1}{4k}\cos\alpha + \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}\frac{\partial \beta}{\partial t} \end{bmatrix} v \qquad (3.43b)$$

A un changement de base près, cette paire de Lax coïncide avec (3.9 et 3.10). Notons enfin qu'elle a également été obtenue en examinant le problème de ligne de vortex dans un superfluide soumis à un champ statique externe [32].

b) La méthode du problème inverse

Le problème direct

Avec les conditions aux limites habituelles $\alpha \to 0$, $\beta_x \to 4A'$, $\beta_t \to 4A''$ lorsque $x \longrightarrow \pm \infty$ le système linéaire (3.43a) et (3.43b) prend la forme asymptotique :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = i \begin{bmatrix} -k - A' & 0 \\ 0 & A' + k \end{bmatrix} v \qquad (3.44a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = i \begin{bmatrix} -\frac{1}{4k} - A'' & 0 \\ 0 & A'' + \frac{1}{4k} \end{bmatrix} v \qquad (3.44b)$$

On introduit les solutions de Jost $\varphi(x,k)$ et $\psi(x,k)$ solutions de (3.43a) pour $k = \zeta + i\eta$ avec les conditions de contour suivantes (pour $\eta = 0$) , $\rho = k + A'$

$$\varphi \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x - iA'x} \qquad x \to -\infty$$

$$\psi \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x + iA'x} \qquad x \to +\infty$$

Notons enfin que pour $\eta = 0$ $\quad \overline{\psi}(x,\zeta) = \begin{pmatrix} \psi_2^*(x,\zeta) \\ -\psi_1^*(x,\zeta) \end{pmatrix}$

est solution de (3.43a) et forme avec ψ un ensemble complet de solutions indépendantes ; on peut donc écrire

$$\varphi(x,\zeta) = a(\zeta)\,\overline{\psi}(x,\zeta) + b(\zeta)\,\psi(x,\zeta) \qquad (3.45)$$

On peut montrer que φ, ψ, $\overline{\psi}$, a et b peuvent être prolongées analytiquement dans le demi plan supérieur en k $(\mathrm{Im}\, k > 0)$

Les zéros de $a(k)$ $(\mathrm{Im}\, k > 0)$ correspondent aux valeurs propres discrètes de (3.43a). En ces points nous avons

$$\varphi(x,k_n) = c_n\,\psi(x,k_n) \qquad (3.46)$$

L'évolution temporelle de $a(\zeta)$, $b(\zeta)$, c_n peut être obtenue en insérant (3.45) et (3.46) dans (3.44a) :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial b}{\partial t} = \frac{i}{2\zeta}\, b + 2iA''b \quad , \quad \frac{\partial c_n}{\partial t} = \frac{i}{2k_n}\, c_n + 2iA''c_n \qquad (3.47)$$

Enfin on peut écrire des équations intégrales pour φ , ψ

$$\varphi_1(x) = e^{-ipx + i\mu(x)} + \int_{-\infty}^{x} dy\, B(y) \int_{y}^{x} dz\, e^{2ip(z-y)} \times$$

$$\times e^{-2i(\mu(z)-\mu(y))} (-B^*(z))\, e^{ip(y-x) - i(\mu(y)-\mu(x))} \cdot \varphi_1(y) \tag{3.48a}$$

$$\varphi_2(x) = \int_{-\infty}^{x} dy\, e^{ip(x-y) - i(\mu(x)-\mu(y))} B(y)\, \varphi_1(y) \tag{3.48b}$$

$$\mu(x) = -\int_{-\infty}^{x} du \left\{ \frac{\cos\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial\beta}{\partial u} - A' \right\} \tag{3.49}$$

$$B(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} - i\, tg\frac{\alpha}{2} \frac{\partial\beta}{\partial x} \right) \tag{3.50}$$

et de même

$$\psi_1(x) = -\int_{x}^{\infty} dy\, e^{ip(x-y) - i(\mu(y)-\mu(x))} (-B^*(y))\, \psi_2(y) \tag{3.51a}$$

$$\psi_2(x) = e^{ipx + i(\mu(\infty)-\mu(x))} + \int_{x}^{\infty} dy\, (-B^*(y)) \times$$

$$\times \int_{x}^{y} dz\, e^{2ip(y-z) - 2i(\mu(y)-\mu(z))} B(z) \times$$

$$\times e^{-ip(y-x) + i(\mu(y)-\mu(x))} \psi_2(y) \tag{3.51b}$$

On en déduit les comportements asymptotiques pour $k \to \infty$ $(\mathrm{Im}\, k > 0)$

et donc on obtient $a(k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^{i\mu(\infty)}\left(1 + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)$

$a(k)$ obéit de plus à une relation de dispersion

$$a(k) = e^{i\mu(\infty)} \exp\left\{\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|a(k')|}{k'-k}\, dk'\right\} \times \prod_n \frac{k-k_n}{k-k_n^*} \qquad (3.52)$$

(les développements mathématiques peuvent être trouvés dans l'article de Faddeev [5], [4] par exemple).

Le problème inverse

Considérons la représentation intégrale suivante de la fonction de Jost ψ

$$\psi(x,k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx + i(\mu(\infty) - \mu(x))} + \int_x^\infty K(x,s)\, e^{ips + i(\mu(\infty) - \mu(s))}\, ds \qquad (3.53)$$

On peut dériver une équation intégrale pour le noyau K, puis relier celui-ci aux variables de champs α et β du problème non linéaire initial.

Pour cela divisons l'identité (3.45) par $a(3)$ puis prenons en la transformée de Fourier par rapport à 3. Compte-tenu des comportements

asymptotiques de a, b, φ, ψ on obtient l'équation de Guelfand-Levitan (Marchenho) du problème (voir [4]) :

$$\overline{K}(x,y)\, e^{-i\left(\mu(\infty)-\mu(y)\right)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F(x,y)\, e^{i\left(\mu(\infty)-\mu(x)\right)} + \int_x^\infty K(x,s)\, F(s+y)\, e^{i\left(\mu(\infty)-\mu(s)\right)}\, ds = 0 \qquad (3.54)$$

$$K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}, \quad \overline{K} = \begin{pmatrix} K_2^* \\ -K_1^* \end{pmatrix}$$

et F est déterminé par les données de diffusion.

$$F(z) = \sum_n \frac{c_n}{i \left.\frac{da}{dk}\right|_{k=k_n}} e^{i\rho_n z} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(k)}{a(k)} e^{i\rho z}\, dk \qquad (3.55)$$

$$\rho = k + A', \quad \rho_n = k_n + A'$$

On peut d'autre part réécrire l'équation précédente sous une forme plus simple en effectuant le changement

$$K_1(x,y) = K_1'(x,y)\, e^{-i\left(2\mu(\infty)-\mu(x)-\mu(y)\right)} \qquad (3.56a)$$

$$K_2(x,y) = K_2'(x,y)\, e^{-i\left(\mu(x)-\mu(y)\right)} \qquad (3.56b)$$

L'équation (3.54) s'écrit

$$\overline{K}'(x,y) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F(x+y) + \int_x^\infty K'(x,s)\, F(s+y)\, ds = 0 \qquad (3.57)$$

Le lien entre $K'(x,y)$ et les champs α, β s'obtient en écrivant l'équation d'onde sur $K(x,y)$. L'équation pour ψ (3.43a) peut se réécrire

$$\left\{ i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & i B^* \\ i B & \frac{\partial \mu}{\partial x} \end{pmatrix} \right\} \psi = p \psi \tag{3.58}$$

soit $L\psi = p\psi$, $p = k + A'$

Considérons $$\psi^\circ(x,k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx + i(\mu(\infty) - \mu(x))}$$

On a alors

$$(p - L)(\psi - \psi^\circ) = i \begin{pmatrix} B^* \\ 0 \end{pmatrix} e^{ipx + i(\mu(\infty) - \mu(x))} \tag{3.59}$$

et par conséquent

$$\left(i \frac{\partial}{\partial y} - L \right) K(x,y) e^{-i\mu(y)} = i \begin{pmatrix} B^* \\ 0 \end{pmatrix} \delta(x-y) e^{-i\mu(y)} \tag{3.60}$$

Effectuons le changement $\xi = x + y$, $\eta = y - x$

L'équation pour K_1 s'écrit

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} K_1 + 2i \frac{\partial}{\partial \eta} K_1 - \frac{\partial \mu}{\partial x} K_1 - i B^* K_2 = i B^* \delta(-\eta) \tag{3.61}$$

Si on intègre sur η entre $-\varepsilon$, $+\varepsilon$, en prenant la limite $\varepsilon \to 0$, nous avons ($K(\xi, \eta) = 0$ si $\eta < 0$)

$$B^*(x) = 2 K_1(x,x) \tag{3.62}$$

Soit $$2 K_1'(x,x) = B^*(x) e^{2i(\mu(\infty) - \mu(x))} \tag{3.63}$$

où K_1' ne dépend pas explicitement des champs α et A

(voir équation 3.57). La dépendance temporelle des coefficients c_m nous donne la dépendance en t du noyau K_1'

On obtient alors en utilisant les équations du mouvement :

$$2\,\frac{\partial K_1'}{\partial t} = \frac{1}{2}\sin\alpha\; e^{2i\,(p(\infty)-p(x))} - 4iA''K_1' \qquad (3.64)$$

K_1' et $\frac{\partial K_1'}{\partial t}$ étant explicites on obtient

$$\frac{K_1'}{2iA''K_1 + \partial K_1'/\partial t} = \frac{2B^*}{\sin\alpha} \qquad (3.65)$$

or $B^* = \frac{1}{2}\left(\alpha_x + i\,tg\frac{\alpha}{2}\,\beta_x\right)$ et donc

$$Re\left\{\frac{K_1'^{\,0}}{\partial K_1'^{\,0}/\partial t}\right\} = \frac{1}{\sin\alpha}\,\frac{\partial\alpha}{\partial x}\quad,\quad K_1'^{\,0} = K_1'\,e^{-2iA''t} \qquad (3.66)$$

qui permet d'obtenir $\alpha(x,t)$ puis

$$Im\left\{\frac{K_1'^{\,0}}{\partial K_1'^{\,0}/\partial t}\right\} = \frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\partial\beta}{\partial x} \qquad (3.67)$$

donne $\beta(x,t)$ par simple intégration.

La relation (3.63) permet de fixer les constantes d'intégrations non indépendantes. On obtient ainsi la formule à N solitons pour le modèle CSG.

Par exemple pour la solution à un soliton, nous avons $b(k, t=0) = 0$ et $a(k)$ admet un zéro unique en $k_1 = \xi_1 + i\,\eta_1 \quad (\eta_1 > 0)$

soit $m_0 = \dfrac{c_1(0)}{a'_1(k_1)}$, $m(t) = m_0\, e^{+\frac{i}{2k_1}t + 2iA''t}$

et donc $F'(z) = -i\,m\; e^{i k_1 z + i A' z}$ (3.68)

On obtient pour le champ $\psi(x^0, x^1) = \sin\frac{\alpha}{2}\, e^{i\beta/2}$ dans le référentiel propre du soliton :

$$\psi(x^0, x^1) = A\,\frac{\exp\{i\sqrt{1-A^2}\,x^0\}}{\mathrm{ch}(A\,x^1)} \qquad (3.69)$$

avec $|A| < 1$

(la solution physique avec constante de couplage g s'écrit $\varphi = \frac{1}{g}\,\psi$)

c) Les courants conservés

Considérons la paire de Lax du modèle (3.9) et (3.10) et soit χ une solution de ce système linéaire écrite sous la forme

$$\chi(x,t,k) = \exp\{ikx + \int_{-\infty}^{x} g(u,t)\,du\}\begin{pmatrix} f(x,t) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3.70)$$

On obtient avec

$$L\chi = k\chi \qquad (3.71)$$

$$i\{ikf + fg + f_x\} + \tfrac{i}{2}\varphi = kf \qquad (3.72a)$$

$$i\{-ik - g\} + \tfrac{i}{2} f\varphi^* = k \qquad (3.73b)$$

et donc

$$g = \tfrac{1}{2} f\varphi^*$$

La relation (3.72a) nous donne alors une équation pour f. D'après (3.10) on obtient alors

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi^* f) = \frac{1}{2ik}\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\alpha - \sin\alpha\, e^{-i\omega} f\right) \tag{3.75}$$

Si on écrit f comme une série asymptotique en k

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{(-2ik)^n} \tag{3.76}$$

on obtient une loi de récurrence définissant les coefficients f_n [33]

$$f_{n+1} = \frac{\varphi}{2}\delta_{n,0} + \frac{\partial}{\partial x} f_n + \varphi^* \sum_{k+\ell=n} f_k f_\ell \tag{3.77}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi^* f_n) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta_{n,1}\cos\alpha - e^{-i\omega}\sin\alpha\, f_{n-1}\right) \tag{3.78}$$

Si nous posons $$J_x^{(n)} = \varphi^* f_n \tag{3.79a}$$

$$J_t^{(n)} = \sin\alpha\, e^{-i\omega} f_{n-1} - \cos\alpha\,\delta_{n,1} \tag{3.79b}$$

$J^{(n)}$ est local dans les champs α, β et de plus on a

$$\partial^\mu J_\mu^{(n)} = 0 \tag{3.80}$$

On obtient ainsi une infinité de courants locaux conservés pour la théorie classique CSG.

CHAPITRE IV

Le Modèle Complex Sine-Gordon Quantique

De nombreux résultats sont connus à ce jour pour les modèles classiquement intégrables. Par contre très peu de théories relativistes de champs complètement intégrables au niveau classique ont été étudiées au niveau quantique. Le seul exemple que nous ayons est essentiellement le modèle de Sine-Gordon (SG) [7] . Au niveau classique le modèle S-G est donc complètement intégrable et exhibe de ce fait une infinité de courants conservés. De plus les équations du mouvement possèdent des solutions connues exactement (les Solitons) et la matrice S classique décrivant la diffusion de ces objets est factorisable à cet ordre. Le niveau quantique s'avère très riche ; la théorie est renormalisable (simplement par ordre normal) avec une fonction β identiquement nulle et toutes les propriétés classiques ont une contrepartie quantique. Ainsi le modèle possède une infinité de courants quantiques conservés [19] la matrice S est factorisable et a été calculée exactement [16] ; enfin Faddeev et al [12] ont développé une méthode inverse quantique pour le modèle (SG) permettant une résolution exacte au niveau quantique.

Dans ce contexte, il est très intéressant d'examiner les théories quantiques des champs dont le modèle classique associé est complètement intégrable. Plusieurs problèmes restent encore posés à cet égard. En particulier quelles peuvent être les conséquences de l'intégrabilité complète classique, sur les propriétés de renormalisation par exemple de la théorie quantique (cette relation étant assez cachée dans le modèle S-G par la renormalisation "triviale" par ordre normal du Lagrangien). Tout ceci nous amène donc à étudier des modèles classiquement-complètement intégrables (obtenus par exemple par la réduction du modèle σ- non linaire $O(N)$ [30] ou CP^N [34]) au niveau quantique.

Ces théories se trouvent être des généralisations du modèle S-G. La réduction du modèle O(3) conduit à S-G, celle du modèle O(4) à CSG que nous avons exploré ici. Le lagrangien s'écrit en deux dimensions d'espace-temps.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left\{\frac{(\partial_\mu \vec{\psi})^2}{1 - g^2\vec{\psi}^2} - m^2\vec{\psi}^2\right\}$$

où $\vec{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_N)$, $N = 1, 2, \ldots$ est un champ réel. Pour N = 1, on obtient S-G par la transformation $\psi_1 = \frac{1}{g}\sin\frac{g\varphi}{2}$ et pour N = 2, CSG.

Pour N = 2, la renormalisabilité de la théorie n'est pas triviale et a priori il y a un nombre infini de contretermes. L'étude de ce modèle au niveau quantique est constituée par les deux articles suivants :

1. "Renormalization character and quantum S-matrix for a classically integrable model" (Phys. Lett. 101B, 302 (1981),

2. "Quantum U(1) invariant theory from integrable classical model" (L.P.T.H.E. preprint 18, Dec. 1981).

Dans l'article 1. on établit la renormalisabilité de la théorie quantique à l'ordre une-boucle avec $\beta(g) = 0$. A cet ordre le groupe de renormalisation nous montre que ceci implique un comportement asymptotique non universel pour les fonctions de Green. Le modèle exhibe donc une ligne de points critiques, ce qui est le cas d'autres modèles intégrables tel le modèle à 8-vertex de Baxter (voir quelques précisions dans le chapitre V). De plus la matrice S-quantique $(2 \to 2)$ est calculée explicitement. Si celle-ci était factorisable au niveau arbre elle ne l'est plus à une boucle. Néanmoins il existe un terme unique et local qui restore cette propriété jusqu'à une boucle $\Delta L = \frac{m^2 g^4 (\vec{\psi}^2)^2}{4\pi}$

L'article 2. s'attache tout d'abord à établir l'unicité du modèle CSG en tant que théorie O(N) (N = 2), bosonique, avec un Lagrangien local (et possédant des constantes de couplage de dimension de masse positive) ayant une matrice S factorisable. On montre sous ces hypothèses que les seules solutions de ce problème sont SG pour N = 1, CSG pour N = 2 et une théorie libre pour $N \geqslant 3$. Ensuite l'étude du niveau quantique est complétée. En particulier, on examine les propriétés quantiques des courants classiques non triviaux (autres que le courant électrique et le tenseur énergie impulsion) venant de l'intégrabilité classique. Aucune renormalisation propre n'est nécessaire à l'ordre 1-boucle et un courant quantique conservé et local est construit. Enfin le spectre semi-classique est exploré. Il se révèle être constitué, dans la limite du couplage faible, d'états liés à n particules du champ fondamental.

RENORMALIZATION CHARACTER AND QUANTUM S-MATRIX FOR A CLASSICALLY INTEGRABLE THEORY

H.J. de VEGA and J.M. MAILLET

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies(*), Paris(**)

ABSTRACT : The quantum theory of a N-component generalization of Sine-Gordon is investigated. We find at one-loop that the model is renormalizable only when the corresponding classical theory is completely integrable : N = 1 (Sine-Gordon) and N = 2 (reduced O(4) σ-model). Moreover the coupling constant does not renormalize in these two cases. Although the S-matrix for N = 2 is factorizable at the tree level, an anomaly appears at one loop. Its effect is like a local quartic coupling.

PAR-LPTHE 81/02 JANVIER 1981

(*) Laboratoire associé au C.N.R.S.

(**) Postal address : Université Pierre et Marie Curie
Tour 16, 1er étage
4 place Jussieu
75230 Paris Cédex 05
France

An impressive amount of results are known at present for the quantum Sine-Gordon (S-G) model where the classical theory is completely integrable [1, 2].

In this context, it is indeed appealing to investigate the quantum theories associated to completely integrable classical models.

One would like to know which of the nice classical features of a relativistic model (spectrum, infinite number of conservation laws) have a quantum counterpart. Also, what are their influences (if any) on the renormalization group properties of the quantum theory.

The reduction procedure [3] allows to construct new classical integrable models which are related by gauge equivalence [4]. In this way the O(3) σ-model leads to S-G theory. More generally, the O(N) and CP^{N-2} non linear σ-models (with $N \geqslant 4$) can be reduced to generalizations of classical Sine-Gordon [3, 5, 6] or Sinh-Gordon [7] models.

In this letter we investigate the quantum theory of a first model of this class : the O(4) reduced σ-model (also called Complex Sine-Gordon (C S G)) [5, 8].

We start from the lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\frac{(\partial_\mu \vec{\Psi})^2}{1 - g^2(\vec{\Psi})^2} - m^2(\vec{\Psi})^2\right] \qquad (1)$$

at two space-time dimensions.

There $\vec{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_N)$ is a real field. For N = 1 this model reduces to S G through the transformation

$\Psi_{1(x)} = \frac{1}{g} \sin \frac{\beta \varphi_{(x)}}{2}$. For N = 2 it is gauge equivalent to

the O(4) sigma-model with non-zero boundary conditions at infinity [3].

We quantize model (1) in the usual way by splitting $\mathcal{L}$ into free and interacting parts

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

$$\mathcal{L}_{0(x)} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \vec{\Psi})^2 - m^2 (\vec{\Psi})^2\right] \qquad (2)$$

$$\mathcal{L}_{I(x)} = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^{\infty} (\partial_\mu \vec{\Psi})^2 \; g^{2K} \; (\vec{\Psi}^2)^K$$

We note that there is an infinite number of interaction vertices. We use dimensional regularization [9] and hence no mesure term is needed because $\delta^{(\nu)}_{(0)} = 0$ (where ν is the number of space-time dimension).

Power counting tells us that the general form of the counterterms will be

$$\Delta_N \mathcal{L}_{(x)} = m^2 \; G_N(\vec{\Psi}^2) + (\partial_\mu \vec{\Psi})^2 H_N(\vec{\Psi}^2) + (\vec{\Psi} \cdot \partial_\mu \vec{\Psi})^2 I_N(\vec{\Psi}^2)$$

where G, H and I are Taylor expandable functions.

It is not clear solely by power counting if all ultraviolet divergences can be absorbed in the renormalization of m^2, g^2 and $\vec{\Psi}$.

We understand that a quantum field theory is renormalizable if all divergences can be absorbed in the parameters and fields already present in the classical lagrangian (this means, without the freedom of introducing new arbitrary coupling constants).

In order to elucidate the renormalization properties of this model we have computed all the relevant quantities to the one-loop order.

For the two-point function we get :

$$\Gamma^{(2)\,(bare)}_{a_1 a_2}(p,-p,m^2,g) = i\,\delta_{a_1 a_2}\Big[p^2 - m^2 + \frac{Ng^2}{4\pi}(p^2+m^2)\Big(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi\Big) + O(\epsilon, g^4)\Big] \quad (4)$$

where $\epsilon = 1 - \nu/2$ and γ stands for Euler's constant.

We then find for the mass and wave function renormalization

$$\delta m^2 = \frac{m^2 N g^2}{2\pi}\left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right] + O(\epsilon, g^4) \quad (5)$$

$$Z = 1 - \frac{Ng^2}{4\pi}\left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right] + O(\epsilon, g^4) \quad (6)$$

Using these counterterms we get for higher 1PI Green's functions

$$\Gamma^{(2n)}_{a_1,\dots,a_{2n}}(p_1,\dots,p_{2n};m^2;g) \equiv Z^n\ \Gamma^{(2n)\,(bare)}_{a_1,\dots,a_{2n}}(p_1,\dots,p_{2n},m^2+\delta m^2,g) \quad (n \geq 2) \quad (7)$$

Divergent part of $\Gamma^{(2n)}_{a_1,\dots,a_{2n}}(p_1,\dots,p_{2n};m^2;g) =$

$$= i\,\frac{(2g^2)^n (n-1)!}{8\pi\epsilon}(N-2)\Bigg\{(n-1)\sum_{\substack{i=1\\ \text{odd } i}}^{2n-1} p_i \cdot p_{i+1} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leq i<j\leq 2n-1\\ \text{odd } i \text{ and } j}} (p_i + p_{i+1})\cdot(p_j + p_{j+1})\Bigg\}\delta_{a_1 a_2}\cdots\delta_{2n-1,2n} + \text{permutations} \quad (8)$$

We see that for N = 2 mass and wave function renormalization

are enough to eliminate the one-loop poles at two-dimensions. The theory can be renormalized in this case without changing the form of $\mathcal{L}$. Moreover g does not renormalize.

If N = 1, we have $a_i = 1$ for all i and all permutations add in eq.(8). We get in this way a zero residue at $\nu = 2$ which is in agreement with the fact that there is no coupling constant renormalization in S G model [1]. For $N \geq 3$ the model is not renormalizable in the sense precised before because counterterms of the type

$$\frac{g^4}{\epsilon} (\vec{\Psi} \cdot \partial_\mu \vec{\Psi})^2$$

are needed.

In order to examine the nature of the renormalization for N = 2 and by analogy with S G theory (N = 1) we try to cast the C S G lagrangian in the form :

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \alpha)^2 + (\partial_\mu \beta)^2 + V(\alpha,\beta) + \text{total divergence} \qquad (9)$$

If this would be possible, normal ordering will eliminate all divergences.

We consider the following transformation

$$\Psi_1 = \Psi_1(\alpha,\beta) \quad , \quad \Psi_2 = \Psi_2(\alpha,\beta)$$

Then if for simplicity we assume a zero total divergence in eq.(9) we get that $\Psi \equiv \Psi_1 + i\,\Psi_2$ must be an analytic function of $z = \alpha + i\beta$ in some domain and must verify $\left|\frac{d\Psi}{dz}\right|^2 + |\Psi(z)|^2 = \frac{1}{g^2}$

By power expanding Ψ in its domain of analyticity it follows that the unique solution is the trivial one ($\Psi = cte$) . Of course we cannot exclude that a more general transformation could bring $\mathcal{L}$ to

the form of eq.(9).

Although the resemblance of the one-loop results in real and Complex Sine-Gordon models, the explanation of the renormalization appears to be more involved in C S G. The O(N) symmetry is manifestly not enough to explain that, because the theory is O(N) symmetric but non-renormalizable for $N \geqslant 3$.

It must be noted that our model exhibits the property of classical complete integrability precisely for N = 1 and 2 (for $N \geqslant 3$ the S-matrix is not factorizable already at the tree level [see below] which suggests that the classical theory is not completely integrable). All this leads to a natural question : what is the general connection between classical integrability and the non-renormalization of coupling constants ? Other models that share both properties are the generalized Toda field theories[10]. In these models associated to Lie algebras the only divergent diagram is the tadpole. Hence we can renormalize by simple normal ordering the lagrangian. This renormalizes the mass(es) but not the coupling constant.

Also, a related phenomena is the non-universal critical behaviour exhibited by the exactly integrable eight-vertex model [11].

The renormalization group equation (R G E) for the Complex Sine-Gordon model follows from the above computations

$$\left[m\frac{\partial}{\partial m} - \varepsilon g\frac{\partial}{\partial g} - 2n\gamma(g)\right]\Gamma^{(2n)}_{a_1\dots a_{2n}}(x_1,\dots,x_{2n},m^2,g) = \Delta\,\Gamma^{(2n)}_{a_1,\dots,a_{2n}}(x_1,\dots,x_{2n};m^2;$$

(10)

We find from eq.(6) $\gamma(g) = \frac{g^2}{2\pi} + O(g^4)$ (11)

and here Δ stands for the soft mass insertion

Of course we cannot ensure the validity of eq.(10) beyond the one-loop level but it is nevertheless interesting to explore its consequences. The solution of the R G E implies a non universal short distance behaviour for the Green's functions at $\nu = 2$.

$$\Gamma^{(2n)}_{a_1,\dots,a_{2n}}(\lambda x_1,\dots,\lambda x_{2n};m^2;g) = \lambda^{2n\gamma(g)}\,\Gamma^{(2n)}_{a_1,\dots,a_{2n}}(x_1,\dots,x_{2n};m^2,g) \qquad (12)$$
$$\lambda \longrightarrow 0$$

We pursue the study of our model by computing the S-matrix. Lorentz and O(N) invariance imply the following form for the $2 \longrightarrow 2$ S-matrix

$$\langle a_3\,p_3,\, a_4\,p_4\ \text{out}\,|\,a_1\,p_1,\, a_2\,p_2\ \text{in}\rangle = (2\pi)^2\, 2p_1^0\, 2p_2^0 \times$$
$$\times\Big\{\delta(p_1'-p_3')\,\delta(p_2'-p_4')\Big[\delta_{a_1a_2}\delta_{a_3a_4}\,S_1(\theta) + \delta_{a_1a_3}\delta_{a_2a_4}\,S_2(\theta) + \qquad (13)$$
$$+\,\delta_{a_1a_4}\delta_{a_2a_3}\,S_3(\theta)\Big] + (1\leftrightarrow 2)\Big\}$$

Here θ stands for the rapidity

$$(p_1+p_2)^2 = 4m^2\cosh^2(\theta/2)$$

It is convenient for the subsequent discussion to define the ratios

$$h(\theta) = \frac{S_2(\theta)}{S_3(\theta)} \qquad g(\theta) = \frac{S_1(\theta)}{S_3(\theta)} \qquad (14)$$

We find at the leading order (tree diagrams) for N arbitrary

$$S_1(\theta) = -S_3(\theta) = -ig^2\coth\theta + O(g^4)$$
$$S_2(\theta) = 1 + \frac{ig^2}{\sinh\theta} + O(g^4) \qquad (15)$$

These tree amplitudes identically verify the factorization equations when N = 2. Moreover the $2 \longrightarrow 4$ amplitude vanishes at the tree level in that case [12].

We then find :

$$g(\theta) = -1 + O(g^2) \quad , \quad h(\theta) = \frac{th\,\theta}{i g^2} + O(g^0)$$

This implies that $g(0) \neq 0$. In that case, the factorization equations can be satisfied only if the non trivial condition $g(\theta) = -1$ holds to all orders [2]. That would imply a vanishing reflection coefficient between charged particles states.

For $N \geqslant 3$ the factorization equations are not satisfied at the tree level. This strongly suggests that the classical theory is not completely integrable in that case.

For N = 1 and 2 we find for the renormalized amplitudes at one-loop order :

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta) = -i g^2 \coth\theta + \frac{i g^4}{2\pi\, sh\theta}\left[1 + ch\,\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{N-2}{sh\theta}(i\pi - \theta)\, ch^2\theta - 2\pi i \coth\theta \right] + O(g^6) \qquad (16)$$

$$S_2(\theta) = 1 + \frac{i g^2}{sh\theta} + \frac{i g^4}{2\pi\, sh\theta}\left\{ N - 2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2\pi i}{sh\theta}\left(1 + \frac{1}{2} sh^2\theta\right)\right\} + O(g^6) \quad , N = 1 \text{ or } 2.$$

For N = 1 the $2 \longrightarrow 2$ S-matrix reduces to $S = S_1 + S_2 + S_3$

$$S = 1 + \frac{i g^2}{sh\theta} + \frac{i g^4}{2\pi\, sh\theta} - \frac{g^4}{2\, sh^2\theta} + O(g^6)$$

This expression exactly agrees with the expansion of the S G S-matrix [2]:

$$S(\theta) = \frac{sh\theta + i \sin\pi\gamma}{sh\theta - i \sin\pi\gamma} \qquad \text{where} \quad \gamma = \left(\frac{2\pi}{g^2} - 1\right)^{-1} \tag{17}$$

We have for N = 2

$$g(\theta) = -1 + \frac{g^2}{\pi\, ch\theta} + O(g^4)$$

Although the S-matrix is factorizable at the tree level we see that this is no more true at one-loop. This can be considered as a quantum anomaly and implies that the infinite number of classically conserved charges is no more conserved in the quantum theory for N = 2.

Also the reflection coefficient is non zero :

$$R(\theta) = S_1 + S_3 = \frac{i\, g^4}{\pi\, sh\theta} + O(g^6) \tag{18}$$

It should be noted that $R(\theta)$ has a purely kinematical dependence in θ .

A tree diagram corresponding to a $(\vec{\psi}^2)^2$ coupling will give this θ dependence. Moreover $(\vec{\psi}^2)^2$ is the only local interaction with this property.

So, if we add to the lagrangian

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{m^2 g^4}{4\pi} (\vec{\psi}^2)^2 \tag{19}$$

the C S G S-matrix turns to be factorizable at the one-loop level.

This term has no influence on the one-loop renormalization

properties but it will be relevant yet at two-loops.

In conclusion, our results suggest several issues for the C S G theory.

First, is there any hidden (super) symmetry that explains the cancellations we have found ?

Moreover, this symmetry may be simply the classical complete integrability.

A link could exist between the one-loop renormalization properties and the tree level factorizability. More generally factorizability at the n^{th} order could ensure renormalizability at the $(n + 1)^{th}$ order. In particular for $n = 1$, this would imply that a coupling precisely as the one given by eq. (19) is needed for the two-loop renormalizability.

REFERENCES :

1 V.E. Zajarov, L.A. Takhtadzhyan and L.D. Faddeev. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 219, 1334 (1974) [Sov. Phys. Dokl. 19, 824 (1975)]
L.A. Takhtadzhyan and L.D. Faddeev. Teor. Mat. Fiz. 21, 160 (1974) [Theor. Math. Phys. (USSR) 21, 1046 (1975)]
S. Coleman. Phys. Rev. D11, 2088 (1975)
S. Mandelstam, Phys. Rev. D11, 3027 (1975)
R. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu. Phys. Rev. D11, 3424 (1975).
E.K. Sklyanin, L.A. Takhtadzhyan and L.D. Faddeev. Teor. Mat. Fiz. 40, 194 (1979) [Theor. Math. Phys. (USSR) 40, 688 (1980)]

2 A.B. Zamolodchikov and Al.B. Zamolodchikov. Ann. Phys. 80, 253 (1979)

3 K. Pohlmeyer. C. M. P. 46, 207 (1976).

4 J. Honerkamp. Freiburg preprint (1979).

5 K. Pohlmeyer and K.H. Rehren. J.M.P. 20, 2628 (1979).

6 H. Eichenherr and J. Honerkamp. Freiburg preprint 12/(1979)

7 V.L. Golo, B.A. Putko. Letter. Math. Phys. 4, 195 (1980).

8 F. Lund. Phys. Rev. Lett. 38, 1175 (1977).
B.S. Getmanov. J.E.T.P. Lett. 25, 119 (1977). [Pis'ma. Zh ETF 25, 132 (1977)] , Teor. Mat. Fiz. 38, 186 (1979) [Theor. Math. Phys., 38, 124 (1979)] .

9 C.G. Bollini and J.J. Giambiagi. Phys. Letters B, 40B, 566 (1972)
G.'t Hooft and M. Veltman. Nucl. Phys. B44, 189 (1972)

10 A.V. Mijailov. J.E.T.P. Lett. 30, 414 (1980) [Pis'ma Zh ETF 30, 443 (1979)] ; A.N. Leznov and MV Saveliev. Lett. Math. Phys. 3, 489 (1979) ; S.A. Bulgadaev. Phys. Lett. B96, 151 (1980).

11 R.J. Baxter. Ann. Phys. 70, 193 and 323 (1972).

12 J. Kaplan and G. Valent (private communication).

QUANTUM U(1) INVARIANT THEORY FROM INTEGRABLE CLASSICAL MODELS

J.M. MAILLET

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies

Paris *

Abstract :

Two-dimensional quantum field theories with soliton like behaviour and $O(N)$ $(N \geqslant 1)$ symmetry are considered. By imposing factorizability of the S-matrix for any value of the coupling constant, the classical theory turns to be uniquely defined. It reduces to Sine-Gordon for $N = 1$, to Complex Sine-Gordon (CSG) for $N = 2$, and to a free theory for $N \geqslant 3$. The quantum CSG theory is investigated. The β-function is identically zero up to one loop and moreover a first non trivial classical conserved current is studied at this order. It is shown that it does not need proper renormalization and a corresponding quantum local conserved current is constructed. Finally the semi-classical spectrum is explored.

PAR LPTHE 81/18

DECEMBER 1981

---

* Laboratoire Associé au C.N.R.S.

* Postal Address : Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)
Tour 16 - 1er étage - 4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05 (France)

I - Introduction

An impressive amount of results are known at present for completely integrable classical models. But only one model of this class, the Sine-Gordon (SG) theory, has been studied at the quantum level as well as at the classical one (1, 2). It exhibits very interesting properties. In particular all the nice classical features (factorizability, conserved currents, complete integrability, ...) turn to have quantum counterparts.

In this context, it is very appealing to explore quantum field theories (QFT) associated to completely integrable classical models. One would like to know what can be the relation (if any) between classical integrability and renormalization group properties. Moreover, what are the quantum transcriptions of the infinite sequence of classical conserved currents. In the last years, different methods have been formulated for the construction of completely integrable classical models. So, the reduction procedure (3) allows to construct new theories of this type which are related by gauge equivalence (4). In this way, the $O(3)$ σ-model leads to S.G. theory. More generally $O(N)$ and CP^N non linear σ-model can be reduced to generalizations of classical S.G. model (3, 5, 6, 7). In this paper we investigate quantum and classical properties of a first model of this class, the $O(4)$ reduced σ-model, also called Complex Sine-Gordon (CSG) model (5, 8).

We start with the lagrangian (at two space-time dimension)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{(\partial_\mu \vec{\psi})^2}{1 - g^2 \vec{\psi}^2} - m^2 \vec{\psi}^2 \right\} \qquad (1.1)$$

where $\vec{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_N)$, $N = 1, 2, \ldots$ is a real field. For $N = 1$, this leads to SG model through the transform $\psi_1 = \frac{1}{g} \sin\left(\frac{\beta\varphi}{2}\right)$.

For $N = 2$, we have the classical CSG theory. It must be noted that the model (1.1.) is $O(N)$ symmetric and shows up an infinite set of interacting vertices.

In order to define the model (1.1) at the classical level it is shown that (1.1) is the unique solution of a very simple problem. Consider the more general $O(N)$ symmetric lagrangian, local, with bosonic fields :

$$L = \frac{1}{2}\left\{ (\partial_\mu \vec{\varphi})^2 f(\lambda \vec{\varphi}^2) - m^2 \vec{\varphi}^2 f(\lambda \vec{\varphi}^2) + \right.$$
$$\left. + (\vec{\varphi}.\partial_\mu \vec{\varphi})^2 h(\lambda \vec{\varphi}^2) \right\} \qquad (1.2)$$

Where λ is a free parameter (the coupling constant) and f, g, h are Taylor expandable functions. As usual we have excluded couplings with negative mass dimensions. We assume that $f(0) = g(0) = 1$, and so we can try perturbation theory as usual, by splitting L into free and interacting parts. Then, if we impose that the model (1.2) is completely integrable at the classical level, the S-matrix has to be factorizable at this order. In this case, we show that (1.2) can be reduced to (1.1) for $N = 1$ and $N = 2$ through a field transformation of the type :

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}\, A(\lambda \vec{\varphi}^2) \qquad (1.3)$$

where A is a Taylor expandable function: $A(u) = 1 + a_1 u + \cdots$
For $N \geq 3$, in the same way, the only solution of this problem for lagrangian (1.2) is the free theory (up to a field transformation (1.3)). This proof is based on the invariance of the S-matrix under a field transformation of the form (1.3) and we make an inductive proof (on the order

n of λ in lagrangian (1.2)). So, the model (1.1) can be fully defined, at the classical level, for $N = 1,2$ by imposing that the S-matrix is completely factorizable at this order. In a second step, we are interested in the definition of such a theory at the quantum level. For $N = 1$, it has been already done(1, 2). For $N = 2$, (CSG), the renormalization properties of model (1.1) seems to be more involved than for $N = 1$ (SG). In fact, we have not found nice field variables as for $N = 1$, in such a way that normal ordering is enough to eliminate all divergences. Nevertheless, the calculations up to the one loop level lead to very interesting results. A preliminary account of some of them has been done in (9). The model (1.1) turns to be renormalizable at this order for $N = 1$ and $N = 2$, but not for $N \geq 3$ Moreover, for $N = 1,2$, the coupling constant g does not renormalize and the β-function is zero. In this way the model exhibits a continuous line of fixed points. This implies a non-universal short distance behaviour for the Green's functions. It must be noted that the theory (1.1) shows up such properties at one loop, precisely in the case $N = 1,2$. That means when the classical model is completely integrable. We calculate also the $2 \to 2$ renormalized S-matrix at one loop. The factorizability equations (2) hold at this order by adding a finite local quadratic term in the Lagrangian. This new interaction is not relevant for the one loop renormalization. But it will be crucial yet at two loops. In this context, our conjecture is that this term is precisely needed for renormalizability at two loops. On the other hand, we have examined the insertion of the first non trivial conserved current (given by the Lax pair) at one loop : this current does not need proper renormalization. Moreover, it exists an unique quantum conserved current at this order corresponding to the classical one, with the same properties (trace, symmetry, conservation law). In this way it seems possible to define the Quantum theory by the same procedure than for the classical one :

by imposing the complete factorizability of the S-matrix. In an equivalent meaning, this leads to a quantum counterpart for the infinite sequence of classical conserved currents.

This paper is organized as follows :

In section II, we investigate the classical properties of model (1.1). We give explicitely the proof of its uniqueness in the sense precised before for $N = 1, 2$. The same procedure works for $N \geqslant 3$ and leads to a free theory when the S-matrix is factorizable. Finally we precise how it is possible to define an infinite set of classical conserved tensor for $N = 2$

In section III, we study the quantum field theory associated to such a classical model. We give all the relevant quantities up to one loop. We examine also the quantum insertion of a first non-trivial classical conserved tensor (that means different than electric current or energy momentum tensor). Finally we give the semi-classical spectrum in a weak coupling approximation (1).

It looks like as the S.G. one (up to a finite renormalization of g) :

$$M_n = \frac{2m}{g^2} \sin\left(\frac{n g^2}{2}\right) , \quad 1 \leq n \leq \frac{\pi}{g^2}$$

and the classical mass is $M_s = (2m/g^2)$

The charge of such a state is $Q_n = \pm n e$, where e stands for the elementary charge. For weak coupling and small $n g^2$ we have $M_n \sim n m$

So for weak coupling the spectrum looks like bound states of n elementary particles.

II - The classical theory

In this section we are interested in theories defined by an O(N) symmetric Lagrangian, bosonic and local, depending on one free parameter (the coupling constant), and which exhibits at the classical level a complete

factorizable S-matrix. One knows through inverse scattering method (ISM), that the CSG model verify all these conditions for $N=2$ and SG for $N=1$ In the CSG's case we examine also the infinite set of classical conserved currents coming from the Lax pair.

A) Lagrangian formulation and factorizability of the s-matrix

The most general bosonic and local lagrangian, O(N) symmetric expanded in power of a free parameter λ is (see (1.2))

$$L = \frac{1}{2}\left\{ (\partial_\mu \vec{\Psi})^2 - m^2 \vec{\Psi}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j (\vec{\Psi}^2)^{j-1} \left(- f_j m^2 (\vec{\Psi}^2)^2 + \right.\right. \tag{2.1}$$

$$\left.\left. + g_j \vec{\Psi}^2 (\partial_\mu \vec{\Psi})^2 + h_j (\vec{\Psi}.\partial_\mu \vec{\Psi})^2 \right) \right\}$$

where $\vec{\Psi} = (\Psi_1 \ldots, \Psi_N)$, $N = 2,3,\ldots$ is a real field and f_j , g_j , h_j are real constants which define the theory . For $N=1$ we have an expression, similar to (2.1), but simpler because in this case $(\Psi.\partial_\mu \Psi)^2 = \Psi^2.(\partial_\mu \Psi)^2$

$$L' = \frac{1}{2}\left\{ (\partial_\mu \Psi)^2 - m^2 \Psi^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \Psi^{2j} \left(- f'_j m^2 \Psi^2 + \right.\right. \tag{2.2}$$

$$\left.\left. + g'_j (\partial_\mu \Psi)^2 \right) \right\}$$

In this case $(N=1)$ the O(N) invariance reduces to the parity invariance $\Psi \to -\Psi$. In such Lagrangians factorizability of the classical S-matrix impose drastic relations between the coefficients f_j , g_j , h_j or f'_j , g'_j

In fact all the connected amplitudes $n \to m$ must be expressed in terms of the $2 \to 2$ amplitudes. This can be done in the following way, by splitting the propagator in two parts :

$$\frac{1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{m^2 - p^2}\right) + i\pi\delta(m^2 - p^2) \qquad (2.3)$$

Consequently, the last term leads to the product of two connected amplitudes $m_1 \to m_1$ and $m_2 \to m_2$ with $m_1 + m_1 < n + m$ and $m_2 + m_2 < n+$

So, it can be possible to see, that the principal part of connected amplitudes must vanish for factorizable S-matrix. Moreover the $2 \to 2$ amplitude has to verify the so-called triangular equations (2).

Finally it must be noted that the S-matrix remains invariant under a field transformation of the form (1.3). In such a way, for every order λ^j there are two relations between the quantities f_j, g_j, h_j for $N \geq 2$ coming from the cancellation of the principal part of the $j+1 \to j+1$ connected amplitude (see later). For $N = 1$, there is only one relation. For all N there is also another relation coming from the invariance of the S-matrix under a transform (1.3). On the other hand, triangular equations give us on f_1, g_1, h_1 one constraint for $N = 2$ and two for $N \geq 3$.

In this way, we can prove that all factorizable bosonic models with O(N) symmetry having an arbitrary free coupling constant can be reduced through transformation (1.3) to the model (1.1) for $N = 1, 2$ and to the free theory for $N \geq 3$

Let us now perform a field transformation (1.3) at first order in λ in (2.1) :

$$\vec{\psi} = \vec{\varphi}\, A(\lambda \vec{\varphi}^2) \quad ; \quad A(u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n \qquad (2.4)$$

We have :

$$L = \frac{1}{2}\left\{ (\partial_\mu \vec{\varphi})^2 - m^2 \vec{\varphi}^2 + \lambda\left(-m^2 (f_1 + 2a_1)(\vec{\varphi}^2)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (g_1 + 2a_1)\vec{\varphi}^2 (\partial_\mu \vec{\varphi})^2 + (h_1 + h a_1)(\vec{\varphi}.\partial_\mu \vec{\varphi})^2 \right) + O(\lambda^2) \right\} \qquad (2.5)$$

It must be noted here that the coefficient a_j appears only at order λ^k in the lagrangian with $k \geq j$ and not for $k < j$

Furthermore the triangular equations give the following relations :

for $N = 2$ $\qquad h_1 = 2 f_1$ (2.6)

for $N \geq 3$ $\qquad h_1 = 2 f_1$ and $g_1 = f_1$ (2.7)

So, for $N = 2$ by choosing $\qquad a_1 = -\frac{1}{2} f_1$ (2.8)

there is only one free parameter $(g_1 - f_1)$ in (2.5) and only the coupling $\vec{\varphi}^2 (\partial_\mu \vec{\varphi})^2$ does not have a vanishing coefficient. For $N \geq 3$, the choice (2.8) leads to the cancellation of the order λ in the lagrangian (2.5).

For $N = 1$, we have $f'_j = f_j$ and $g'_j = f_j + h_j$ and then the choice (2.8) leads to the same results as for $N = 2$ without any triangular equation in this case.

In this way, our assertion turns to be verified at the order one in λ . We are now going to prove it at all order in λ by an inductive procedure.

B) The case $N = 2$

In notation (f_j, g_j, h_j) CSG can be defined by $f_j = h_j = 0$ and $g_j = g_1^j$ for all j (2.9)

Assume now that for all j , $1 \leq j \leq n-1$, the lagrangian (2.1) has been reduced to the CSG form by the choice of coefficients a_j , $1 \leq j \leq n-1$

Note then F_k, G_k, H_k with $k = 1, 2, \ldots$ the resulting coefficients of L after such a transformation (2.4) with $a_k = 0$ for $k \geq n$

Then we have to prove that there exists a_n, in such a way that if F_n^T, G_n^T, H_n^T are the modified coefficients after a transformation (2.4) (with now $a_n \neq 0$) they verify $H_n^T = F_n^T = 0$ and $G_n^T = G_1^n$

First we calculate the contribution of F_n, G_n, H_n to the principal part of the $n+1 \to n+1$ connected amplitude (on the mass shell) Δ_n:

$$\Delta_n = -i\lambda^n \Big\{ (n+1)\, m^2 \,(H_n - 2n F_n) + \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ \text{odd } i}}^{2n+1} p_i p_{i+1} \Big)(2n G_n - H_n) \Big\} 2^{n-1} (n-1)!\, \delta_{12} \cdots \delta_{2n+2,2n+2} \quad (2.10)$$

$$+ \text{ permutations}$$

For $j \leq n-1$ we have $H_j = F_j = 0$ and $G_j = G_1^j$

So, for our lagrangian the amplitude $n+1 \to n+1$ reduces to

$$\mathcal{P}\{(n+1 \to n+1)_{CSG}\} + 2^n n!\, i\, G_1^n \Big\{ \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ \text{odd } i}}^{2n+1} p_i p_{i+1} \Big) \delta_{12} \cdots \delta_{2n+1,2} \quad (2.11)$$

$$+ \text{ permutations} \Big\} + \Delta_n$$

where $\mathcal{P}\{(n+1 \to n+1)\,CSG\}$ stands for the principal part of the CSG's $n+1 \to n+1$ amplitude, which is zero. So (2.11) leads to the principal part of the connected amplitude of lagrangian (2.1):

$$-i\lambda^n 2^{n-1}(n-1) \Big\{ (n+1)\, m^2 (H_n - 2n F_n) + \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ \text{odd } i}}^{2n+1} p_i p_{i+1} \Big)(2n G_n - H_n - 2n G_1^n) \Big\} \delta_{12} \cdots \delta_{2n+1,2n+2} + \quad (2.12)$$

$$+ \text{ permutations}$$

On the mass shell this amplitude has to vanish, that is

$$H_n - 2n F_n = 0 \tag{2.13a}$$

$$H_n - 2n G_n = -2n G_1^n \tag{2.13b}$$

Consider now a change of the field with $a_n \neq 0$

Its modification in lagrangian is at the order λ^n :

$$\Delta L = \frac{1}{i} \lambda^n \Big\{ -2 a_n m^2 (\vec{\varphi}^2)^{n+1} + 2 a_n (\vec{\varphi}^2)^n (\partial_\mu \vec{\varphi})^2 + 4n a_n (\vec{\varphi}^2)^{n-1} (\vec{\varphi} \cdot \partial_\mu \vec{\varphi})^2 \Big\} \tag{2.14}$$

Therefore we have

$$F_n^T = F_n + 2 a_n \tag{2.15a}$$

$$G_n^T = G_n + 2 a_n \tag{2.15b}$$

$$H_n^T = H_n + 4n a_n \tag{2.15c}$$

It is now easy to see that (2.13) is unchanged by such a transformation (this is directly related with the S-matrix invariance under a transformation of the form (2.4)).

We have :

$$2n F_n^T - H_n^T = 0 \tag{2.16a}$$

$$2n G_n^T - H_n^T = 2n G_1^n \tag{2.16b}$$

Then note that by taking $a_n = -\frac{1}{2} F_n$ we get $F_n^T = 0$. Finally, from (2.16) we obtain also $H_n^T = 0$ and consequently $G_n^T = G_1^n$ QED

C) The cases $N=1$ and $N\geq 3$

The proof for $N\geq 3$ is very similar than for $N=2$. Let us only remark that by putting $G_1=0$ all relations (2.9 to 2.16) hold for $N\geq 3$. So we have $G_1=F_1=H_1=0$ and by inductive proof this leads to $G_n=F_n=H_n=0$ for all n

In such a way for $N\geq 3$ the lagrangian (2.1) reduces to the free one.

For $N=1$ the proof has to be slightly changed : we have to put $H_n=0$ for all n and (2.10) goes to

$$\Delta'_n = -i\lambda^n (2n)! \left\{ (n+1)(2n+1)(-2F'_n) + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{1\leq i<j\leq 2n+2} p_i . p_j \right) G'_n \right\} \qquad (2.17)$$

On the mass shell this can be simplified by using the energy momentum conservation

We have :

$$\Delta'_n = i\lambda^n (2n)! \ (n+1)\left\{ (2n+1)F'_n - G'_n \right\} \qquad (2.18)$$

So the principal part of the amplitude vanish only if :

$$G'_n - (2n+1)F'_n = G'^n_1 \qquad (2.19)$$

On the other hand under a field transformation with $a_n \neq 0$, (2.15) are transformed in :

$$F'^T_n = F'_n + 2a_n \qquad (2.20a)$$

$$G_n'^{T} = G_n' + 2a_n(2n+1) \qquad (2.20b)$$

And we have by putting $a_n = -\frac{1}{2} f_n'$

$G_n'^{T} = G_1'^{n}$ which is the desired result.

For (SG), we can also prove this in another way :

For $N=1$, it can be seen easily that (2.2) can be reduced through a transformation (2.4) to

$$L' = \frac{1}{2}\left\{ (\partial_r \varphi)^2 - \frac{m^2}{\lambda} V(\lambda\varphi^2) \right\} \qquad (2.21)$$

where $V(u) = u + \sum_{n=2}^{\infty} v_n u^n$

In this context the factorizability of the S-matrix imposes one relation by order λ and this leads to an unique set of coefficients v_n .

By consequence, the solution of our problem is unique (up to a field transformation). So, SG is the unique model of this class for $N=1$ and can be defined by the factorizability of the S-matrix. In conclusion, we get that the model (1.1) is the unique solution of our problem for $N=1,2$

Moreover the only integrable model of the type (1.2) is (1.1) for $N=1,2$ and the free one for $N \geq 3$

Note that if one does not impose for $N=1$ parity invariance, $(\psi \to -\psi)$ other models are known like the Mikhailov-Shabat theory (10).

D) The CSG's classical conserved currents

Coming from its complete integrability through inverse scattering method, the CSG model exhibits an infinite sequence of conserved currents, local in the field. They can be obtained by expansion in the spectral parameter

from the Lax pair (3) $\quad \psi = \left(\sin(\alpha/2)\cos(\beta/2) \, ; \sin(\alpha/2)\sin(\beta/2) \right)$

$$L(\eta)v = (i/2\gamma)v \quad , \quad v = (v_1, v_2)$$

(2.22)

$$L(\eta) = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ \varphi^* & 0 \end{pmatrix} \quad , \varphi = \alpha_\xi + i\beta_\xi \, tg\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right) e^{i\omega}$$

$$\omega_\xi = \beta_\xi \cos\alpha / \left(2\cos^2\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right)\right) \quad , \quad \omega_\eta = \beta_\eta / \left(2\cos^2\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right)\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = B v$$

$$B = (\gamma/2)\begin{pmatrix} -\cos\alpha, & \sin\alpha \, e^{i\omega} \\ \sin\alpha \, e^{-i\omega}, & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

In light cone variables $\xi = (x^0 + x^1)/2$ and $\eta = (x^0 - x^1)/2$ this procedure leads to the $(\xi; \underbrace{\xi \ldots \xi}_{n})$ and $(\eta; \underbrace{\xi \ldots \xi}_{n})$ components of tensors $R^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ given by recursion relations (11) with the property

$$\partial^\mu R^{(n)}_{\mu, \xi \ldots \xi} = 0 \qquad (2.23)$$

Moreover, using parity invariance we can also construct the $(\eta, \underbrace{\eta \ldots \eta}_{n})$ and $(\xi, \underbrace{\eta \ldots \eta}_{n})$ components of $R^{(n)}$ with both properties

$$\partial^\mu R^{(n)}_{\mu, \eta \ldots \eta} = 0 \qquad (2.24)$$

Now, it must be noted that these four components define a tensor $T^{(n)}_{\alpha, \underbrace{\mu \ldots \sigma}_{n}}$ which is exactly, for the last n indices, the completely symmetric part

with zero trace of $\mathcal{R}^{(n)}$. Indeed, for such a tensor we have in light cone coordinates

$$T^{(n)}_{\alpha,\ldots\xi\ldots\eta\ldots} = T^{(n)}_{\alpha,\ldots\eta\ldots\xi\ldots} = 0 \tag{2.25}$$

And the only non trivial quantities are

$$T^{(n)}_{\alpha,\xi\ldots\xi} = \mathcal{R}^{(n)}_{\alpha,\xi\ldots\xi} \quad \text{and} \quad T^{(n)}_{\alpha,\eta\ldots\eta} = \mathcal{R}^{(n)}_{\alpha,\eta\ldots\eta} \tag{2.26}$$

so from this relation we have :

$$\partial^\mu T^{(n)}_{\mu,\nu\ldots\sigma} = 0 \tag{2.27}$$

Now, in order to simplify the following discussions we rewrite the theory, for $N=2$, in complex notations

$$\psi = \psi_1 + i\,\psi_2 \tag{2.28a}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{|\partial_\mu \psi|^2}{1 - g^2|\psi|^2} - m^2|\psi|^2 \right\} \tag{2.28b}$$

For $n=1$, we get the energy momentum tensor. The first non trivial conserved current is obtained for $n=2$ and its expression reads :

$$T_{\mu\nu\rho} = \left\{ \frac{g^2}{1-g^2|\psi|^2} \left[-\left(g_{\mu\nu}\partial_\rho \psi^* + \text{sym}\right).\Box\psi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 4\left(\partial_\mu\psi^*.\partial_\nu\partial_\rho\psi + \text{sym}\right) - 2\left(g_{\mu\nu}\partial_\rho\partial^\alpha\psi.\partial_\alpha\psi^* + \text{sym}\right)\right] +\right.$$

$$+\frac{\psi\, g^4}{(1-g^2|\psi|^2)^2}\Big[-(g_{\mu\nu}\partial_\rho\psi+sym)(\partial_\alpha\psi^*)^2+$$

$$+4(\partial_\mu\psi\,\partial_\nu\psi^*\partial_\rho\psi^*+sym)-2(g_{\mu\nu}\partial_\rho\psi^*+sym)|\partial_\alpha\psi|^2\Big]+$$

$$+3m^2g^2(g_{\mu\nu}\partial_\rho\psi+g_{\mu\rho}\partial_\nu\psi-g_{\nu\rho}\partial_\mu\psi)\psi^*\Big\} \qquad (2.29)$$

Using this expression (2.29) in light cone variables it is easy to check explicitely that $\partial^\mu T_{\mu\nu\rho}=0$. On the other hand we have

$$T_{\mu\nu\rho}=T_{\mu\rho\nu} \quad ; \quad g^{\nu\rho}T_{\mu\nu\rho}=0$$

In conclusion, we can see that factorizability of the S-matrix, yet at the classical level imposes so drastic constraints on the theory that we get uniqueness of the model verifying such properties for $N=1,2$ and a trivial model for $N\geqslant 3$

In this context, it is very interesting to look at the quantum aspects of this model. In particular how much classical properties can be retrieved at the quantum level and how can they work for the renormalization of the theory.

III - Quantum CSG

Now, we are interested in quantum properties of the model (1.1)

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left\{\frac{(\partial_\mu\vec{\psi})^2}{1-g^2\vec{\psi}^2}-m^2\vec{\psi}^2\right\}$$

in two space time dimension. For $N=1$, it has been yet studied (1, 2). For $N=2$, we have

to define the quantum CSG theory.

A) Renormalization

We quantize the model (1.1) in the usual way by splitting $\mathcal{L}$ into free and interacting parts $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$ with,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left\{(\partial_\mu \vec{\psi})^2 - m^2 \vec{\psi}^2\right\},$$

$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\psi})^2 \sum_{n=1}^{\infty} (g^2 \vec{\psi}^2)^n, \qquad (3.1)$$

$$\vec{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_N) \quad , N = 1, 2, \ldots$$

We use dimensional regularization (12) and so, no measure term is needed because $\delta^\nu(0) = 0$ (ν is the number of space-time dimension). It must be noted that there is an infinity of interaction vertices and hence power counting give us the general form of counterterms

$$\Delta_N \mathcal{L} = m^2 F_N(\vec{\psi}^2) + (\partial_\mu \vec{\psi})^2 G_N(\vec{\psi}^2) + (\vec{\psi}\,\partial_\mu \vec{\psi})^2 H_N(\vec{\psi}^2) \qquad (3.2)$$

where F_N, G_N, H_N are Taylor expandable functions. Consequently it is not clear solely by power counting to see if all UV-divergences can be absorbed only by renormalization of m^2, g and $\vec{\psi}$. For $N=1$, of course, we know (1) that this model is renormalizable without renormalization of g. So in order to elucidate the case $N \geq 2$ one have computed all the relevant quantities up to one loop (9).

We have for the 1PI's Green functions at one loop

$$\Gamma^{(2)\,\text{bare}}_{a_1 a_2}(p, -p, m^2, g) = i\delta_{a_1 a_2}\left\{(p^2 - m^2) + \right. \qquad (3.3)$$

$$\left. + (Ng^2/4\pi)(p^2 + m^2)(1/\varepsilon - \gamma + \ln 4\pi) + O(\varepsilon, g^4)\right\}$$

where $\varepsilon = 1 - \frac{\nu}{2}$ and γ is the Euler's constant.

It follows that

$$\delta m^2 = (N m^2 g^2 / 2\pi)(1/\varepsilon - \gamma + \ln 4\pi) + O(\varepsilon, g^4) \quad (3.4a)$$

$$Z = 1 - (N g^2 / 4\pi)(1/\varepsilon - \gamma + \ln 4\pi) + O(\varepsilon, g^4) \quad (3.4b)$$

By using these counterterms one obtains the $1PI'$s Green functions.

$$\Gamma^{(2n)}_{a_1 \dots a_{2n}}(p_1, \dots p_{2n}, m^2, g) = Z^n \Gamma^{(2n)\ \text{bare}}_{a_1 \dots a_{2n}}(p_1 \dots p_{2n}, m^2 + \delta m^2, g) \quad (3.5)$$

for $n \geq 2$. It turns out that the divergent part of $\Gamma^{(2n)}_{a_1 \dots a_{2n}}(p_1, \dots p_{2n}, m^2, g)$ is equal to

$$i(2g^2)^n/(8\pi\varepsilon) \cdot (n-1)!(N-2)\Big\{(n-1)\sum_{\text{odd } i=1}^{2n-1} p_i p_{i+1} + \\ + (-1/2)\sum_{\substack{1 \leq i < j \leq 2n-1 \\ \text{odd } i \text{ and } j}} (p_i + p_{i+1})(p_j + p_{j+1})\Big\}\delta_{a_1 a_2} \dots \delta_{a_{2n-1} a_{2n}} + \quad (3.6)$$

$$+ \text{permutations}$$

We see that if $N = 2$ (CSG), mass and wave function renormalization are enough to eliminate the one-loop poles at two dimensions. Moreover g does not renormalize. If $N = 1$, $a_i = 1$ for all i and all permutations add in (3.6). So we get a zero residue at $\nu = 2$, which is in agreement with the fact that there is no coupling constant renormalization in S.G. model (1). For $N \geq 3$, the model is not renormalizable ; the introduction of new arbitrary coupling constant is needed. It must be noted that the model exhibits such interesting properties exactly, when the corresponding classical theory is completely integrable (for $N = 1, 2$ only). So, it seems that renormalization properties at one loop and factorizability

of the S-matrix at the tree level are strongly connected.

Now, for $N = 2$, the renormalization group equations (RGE) follows from above computations :

$$\left\{ m \frac{\partial}{\partial m} - \varepsilon g \frac{\partial}{\partial g} - 2n\gamma(g) \right\} \Gamma^{(2n)}_{a_1 \cdots a_{2n}}(x_1, \ldots, x_{2n}, m^2, g) = \Delta \Gamma^{(2n)}_{a_1 \cdots a_{2n}}(x_1, \ldots, x_{2n}, m^2, g) \tag{3.7}$$

where Δ stands for the self mass insertion and γ is defined by

$$\gamma(g) = g^2/2\pi + O(g^4) \tag{3.8}$$

Of course we can ensure the validity of (3.7) and (3.8) only up to the one loop order. Nevertheless, it will be interesting to note that at $v = 2$

$$\beta(g) = 0 \tag{3.9}$$

at this order.

This implies (at least at one loop) a non universal short distance behaviour for the Green's functions (13).

$$\Gamma^{(2n)}_{a_1 \cdots a_{2n}}(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_{2n}, m^2, g) \underset{\lambda \to 0}{\sim} \lambda^{2n\gamma(g)} \Gamma^{(2n)}_{a_1 \cdots a_{2n}}(x_1, \ldots, x_{2n}, m^2, g) \tag{3.10}$$

So the model exhibits a continuous line of critical points. This can be related to other models like the eight vertex model (14) which is completely integrable also, and shows up a fixed line instead of a fixed point (15). Other models that share both properties are the generalized Toda field theories (16). In these models associated to Lie algebras the only divergent

diagram is the tadpole. Hence we can renormalize (as in SG) simply by normal ordering the lagrangian. This renormalizes the mass(es) but not the coupling constant. But, the renormalization properties of CSG appears to be more involved. In fact we have not found (9) field coordinates $\vec{\phi}$ in such a way that (1.1) can be reduced for $N = 2$ to :

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \vec{\phi})^2 - V(\vec{\phi}) \tag{3.11}$$

In (3.11), normal ordering would eliminate all divergences.

B) Quantum S-matrix and higher conserved currents

Lorentz and O(N) invariance imply the following form for the S-matrix.

$$\langle a_3, p_3 ; a_4, p_4 \text{ out} | a_1, p_1 ; a_2, p_2 \text{ in} \rangle = (2\pi)^2 2 p_1^0 p_2^0 \times$$
$$\times \delta(p_1^1 - p_3^1)\,\delta(p_2^1 - p_4^1)\Big[\delta_{a_1 a_2}\delta_{a_3 a_4} S_1(\theta) +$$
$$+ \delta_{a_1 a_3}\delta_{a_2 a_4} S_2(\theta) + \delta_{a_1 a_4}\delta_{a_2 a_3} S_3(\theta)\Big] + (1 \leftrightarrow 2) \tag{3.12}$$

where θ stands for the rapidity.

$$(p_1 + p_2)^2 = 4 m^2 \cosh^2(\theta/2)$$

For $N = 1, 2$ one has found for the renormalized amplitudes (9) :

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta) = -i g^2 \coth\theta + (i g^4 / 2\pi \sinh\theta)\Big[1 +$$
$$+ \cosh\theta + \big[(N-2)/\sinh\theta\big](i\pi - \theta)(\cosh^2\theta) - 2i\pi \coth\theta\Big] + \tag{3.13a}$$
$$+ O(g^6)$$

$$S_2(\theta) = 1 + i g^2/\sinh\theta + (i g^4/2\pi\sinh\theta)\Big[N-2 + \\ + (2i\pi/\sinh\theta)(1 + (1/2)\sinh^2\theta) + O(g^6) \tag{3.13b}$$

For $N = 1$ the $2 \to 2$ S-matrix reduces to $S = S_1 + S_2 + S_3$

$$S = 1 + (i g^2/\sinh\theta) + (i g^4/2\pi\sinh\theta) - (g^4/2\sinh^2\theta) + \\ + O(g^6) \tag{3.14}$$

This expression exactly agrees with the exact result of the SG S-matrix (2)

$$S(\theta) = \frac{\sinh\theta + i\sin(\pi\gamma)}{\sinh\theta - i\sin(\pi\gamma)} \quad ; \quad \gamma = \left((2\pi/g^2) - 1\right)^{-1} \tag{3.15}$$

For $N = 2$, it turns out (9) that the S-matrix is not factorizable at the one loop level as it is the case at the tree level. But it should be noted that factorizability can be recovered simply by adding a finite and unique defined term in the Lagrangian :

$$\Delta\mathcal{L} = (m^2 g^4/4\pi)(\vec{\psi}^2)^2 \tag{3.16}$$

Then the CSG S-matrix is factorizable up to the one loop order. This term has no influence on the one loop renormalization properties but it is of course relevant yet at two loops. In this context, it is interesting to look at the

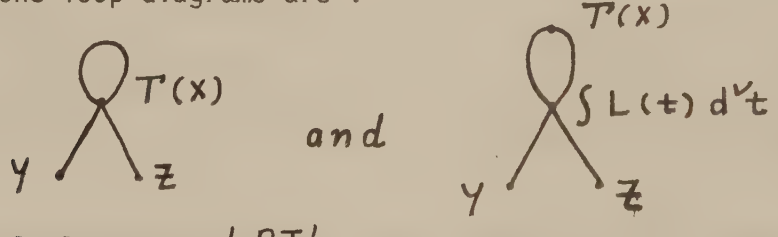
quantum counterpart of the infinite sequence of the classical conserved currents (for $N = 2$). In fact they would be directly related with the factorizability of the S-matrix.

Now we are interested by the insertion of the tensor (2.29) $T_{\mu\nu\rho}$ in Green's functions. These considerations, at one loop, can allow us to examine the renormalization properties of such a classical conserved tensor. For simplicity, we consider the insertion of $T_{\mu\nu\rho}$ in the two point Green's function , and look on the $1PI'_s$ diagrams of

$$\langle T_{\mu\nu\rho}(x)\,\psi(y)\,\psi^*(z)\rangle \qquad (3.17)$$

(Here we have taken complex notations, see (2.28)).

The two one-loop diagrams are :



And we calculate the $1PI'_s$ Green-function up to order g^4 . It can be seen that their divergent part cancels with wave and mass renormalization of the two point Green's functions.

That means :

$Z\langle T_{\mu\nu\rho}(x)\,\psi(y)\,\psi^*(z)\rangle\,(m^2+\delta m^2)$ is finite at two space time dimensions and at one loop order. Then, we have calculated the total divergence of the tensor T at this order :

$$Z\langle \partial_\mu T^\mu{}_{\nu\rho}(x)\,\psi(y)\,\psi^*(z)\rangle\,(m^2+\delta m^2)$$

This expression is not zero at one loop, but there exists finite $A_{\mu\nu\rho}$

tensors such that

$$Z \langle \partial^\mu T_{\mu\nu\rho}(x)\, \psi(y)\, \psi^*(z) \rangle (m' + \delta m') =$$

$$= \langle \partial^\mu A_{\mu\nu\rho}(x)\, \psi(y)\, \psi^*(z) \rangle (m') \qquad (3.18)$$

where the insertion of A is evaluated at the tree level. Moreover, if we impose that

$$Z \langle T_{\mu\alpha}{}^{\alpha}(x)\, \psi(y)\, \psi^*(z) \rangle (m' + \delta m') =$$

$$= \langle A_{\mu\alpha}{}^{\alpha}(x)\, \psi(y)\, \psi^*(z) \rangle (m') \qquad (3.19)$$

The tensor $A_{\mu\nu\rho}$ turns to be unique and it writes

$$A_{\mu\nu\rho} = (g^4/2\pi) \Big\{ m^2 \psi^* (g_{\nu\rho} \partial_\mu \psi + \text{sym}) +$$

$$+ 3m^2 \psi (g_{\nu\rho} \partial_\mu \psi^* + \text{sym}) + (g_{\nu\rho} (\partial_\mu \partial_\alpha \psi . \partial^\alpha \psi^* - \text{cc}) + \text{sym}) +$$

$$+ g_{\nu\rho} \Big[(\partial_\mu \psi . \Box \psi^* + \text{cc}) + 3m^2 (\psi^* . \partial_\mu \psi - \text{cc}) + \qquad (3.20)$$

$$+ 2 \partial_\mu \partial_\alpha \psi^* . \partial^\alpha \psi - 4 \partial_\mu \partial_\alpha \psi . \partial^\alpha \psi^* \Big] \Big\}$$

Now, consider $T^{(1)}_{\mu\nu\rho} = T_{\mu\nu\rho} - A_{\mu\nu\rho}$ (3.21)

At the one loop level $T^{(1)}_{\mu\nu\rho}$ does not need proper renormalization and shows up the same properties as $T_{\mu\nu\rho}$ at the classical level.

In this way, there exists at one loop a non trivial quantum conserved current, local in the field. These results must be related to the one loop properties of the model. The Green's functions are finite only by wave and mass renormalization and the S-matrix's factorizability is restored by a

uniquely defined and finite term in the lagrangian (9). So this strongly suggests that the quantum CSG theory can be completely defined as at the classical level, by imposing the factorizability of the S-matrix. This leads to additional finite terms in lagrangian. Or, in an equivalent way by imposing that the infinite sequence of classical conserved currents survive also at the quantum level, by adding only finite terms like $A_{\mu\nu\rho}$ which are local in the field. These additional terms can be evaluated recursively.

C) Quantum spectrum

Because of its complete integrability through ISM, CSG shows up exact classical solutions. The simplest example is the one soliton solution :

$$\psi(x,t) = (A/g^2)\,\frac{e^{i\sqrt{1-A^2}\,t}}{ch\,Ax} \qquad (3.22)$$

where A is a real constant verifying $|A| \leq 1$ and where the mass has been set equal one. The theory being Lorentz invariant, these solutions can be hoosted to any arbitrary velocity $v < 1$ (the speed of light c = 1) For the classical mass and charge we have

$$M(A) = \frac{2mA}{g^2} \quad \text{and} \quad Q(A) = \pm\,\frac{2e}{g^2}\arcsin A \qquad (3.23)$$

We have explored the quantized spectrum around the one soliton solution (3.22) as a first example. We used the way developed by D.H.N. (1.) for periodic solutions. The energy levels are obtained from $tr\,e^{-iHt}$ through the propagator :

$$G(E) = tr\left(\frac{1}{H-E}\right) = \sum_k \frac{1}{E_k - E}\,, \qquad (3.24)$$

$$G(E) = i\,tr\int_0^\infty \exp\left[i(E-H)T\right]\,dT$$

This expression leads to (1) :

$$G(E) = \int \frac{dM}{2i\pi}\, G^{0}(M,E)\, \bar{G}(M)$$

$$\bar{G}(\Pi) = i\, \frac{d\bar{W}(\Pi)}{d\Pi}\, \frac{e^{i\bar{W}(\Pi)}}{1 - e^{i\bar{W}(\Pi)}} \qquad (3.25)$$

and $G^{0}(M,E)$ is a regular function. We have

$$\bar{W}(\Pi) = \bar{S}(\tau(\Pi)) + M\tau(\Pi) \qquad (3.26)$$

$\bar{S}$ stands for the classical action plus the fredholm determinant of small fluctuations and τ for the period. $\bar{S}$ reduces to the classical action for weak coupling.

The stationary-phase point is at $-\frac{d\bar{S}(\tau)}{d\tau} = M$

One can see from (3.25) that $\bar{G}$ (and so G) has poles when

$$\bar{W}(\Pi) = 2\pi n, \quad n = 1,2,\ldots \quad , \text{i.e.,} \quad \bar{G}(M) \sim \frac{1}{M_n - M} \qquad (3.27)$$

where the particles masses M_n are solutions of $\bar{W}(M_n) = 2\pi n$

(3.28)

In our case, neglecting the small fluctuations we have from (3.22) :

$$S(\tau) = \frac{\tau}{g^2} L \qquad \text{where } \tau = \frac{2\pi}{\sqrt{1-A^2}} \text{ is the period and}$$

hence $$\overline{W}(\Pi) = (4\pi/g^2)\arccos\left[\left(1-(\Pi g^2/2m)^2\right)^{1/2}\right] \quad (3.29)$$

This leads to the mass spectrum

$$M_n = \frac{2m}{g^2}\sin\left(\frac{n g^2}{2}\right), \quad n = 1, \dots, \frac{\pi}{g^2} \quad (3.30)$$

for small g^2, but arbitrary $n g^2 \leq \pi$

Moreover it is easy to compute the charge of such a state.

We obtain $$Q_n = \pm n e \quad (3.31)$$

where e is the canonical elementary charge.

For small coupling and small $n g^2$ we have

$$M_n \sim n m \quad \text{and} \quad Q_n = \pm n e \quad (3.32)$$

It follows that we have boundstates of n elementary particles of mass m and charge e

It must be noted that our results work only for weak coupling (classical approximation). It could be conjecture that as in S.G. the relation between weak coupling approximation and exact results can be done only by a finite "renormalization" of g in (3.30).

Acknowledgements

I am grateful to Hector J. de Vega for innumbrable discussions, advice and encouragements.

REFERENCES

1. V.E. Zakharov, L.A. Tahktadzhyan and L.D. Faddeev, Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R. 219, 1334 (1974) (Sov. Phys. Dokl. 19, 824 (1975)).
L.A. Takhtadzhyan and L. D. Faddeev, Teor. Mat. Fiz. 21, 160 (1974) (Theor. Math. Phys. USSR 21, 1046 (1975)).
S. Coleman, Phys. Rev. D11, 2088 (1975).
S. Mandelstam, Phys. Rev. D11, 3027 (1975).
R. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, Phys. Rev. D11, 3424 (1975).
J.H. Lowenstein and E.R. Speer, Comm. Math. Phys. 63, 97 (1978).
E.K. Sklyanin, L.A. Takhtadzhyan and L.D. Faddeev, Teor. Mat. Fiz. 40, 194 (1979) (Theor. Math. Phys. USSR 40, 688 (1980)).
2. A.B. Zamolodchikov and Al. B Zamolodchikov, Ann. Phys. 80, 253 (1979).
3. K. Pohlmeyer, Comm. Math. Phys. 46, 207 (1976).
4. J. Honerkamp. J.M.P. 22, 277 (1981).
5. K. Polhmeyer and K.H. Rehren, J.M.P. 20, 2628 (1979).
6. H. Eichenherr and J. Honerkamp. Freiburg preprint 12 (1979).
7. V.L. Golo, B.A. Putko, Lett. Math. Phys. 4, 195 (1980).
8. F. Lund, Phys. Rev. Lett. 38, 1175 (1977).
9. H.J. de Vega and J.M. Maillet, Phys. Lett. 101B, 302 (1980).
10. R.K. Dodd, R.K. Bullough, Proc. Roy. Soc. Lond. A352, 481 (1977).
A.V. Zhiber, A.B. Shabat, Dokl. Akad. Nauk. USSR 247 (1979).
11. P.P. Kulish, Teor. Mat. Fiz. 33, 272 (1977).
12. C.G. Bollini and J.J. Giambiagi, Phys. Lett. 40B, 566 (1972).
G't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. B44, 189 (1972).
13. We wish to thank J.H. Lowenstein for remarks about this point.
14. R.J. Baxter, Ann. Phys. 70, 193 and 323 (1972).
15. L.P. Kadanoff and A. Brown, Ann. Phys. 121, 318 (1979) ;
H.J.F. Knops, Ann. Phys. 128, 448 (1980).

16. A.V. Mijailov, J.E.T.P. Lett. 30, 414 (1980) (Pis'ma Zh. ETF 30, 443 (1979)).

A.N. Leznov and M.V. Saveliev, Lett. Math. Phys. 3, 489 (1979) ;

S.A. Bulgadaev, Phys. Lett. B96, 151 (1980).

CHAPITRE V

Conclusion

La factorisabilité de la matrice S s'avère être, tant au niveau classique, qu'au premier ordre quantique (une-boucle), une condition suffisante pour déterminer complètement la théorie dans le cas d'une symétrie O(N), ($N \geqslant 1$), pour des bosons. On obtient ainsi le modèle Sine-Gordon pour N = 1, le modèle Complex Sine-Gordon pour N = 2 et une théorie libre pour $N \geqslant 3$. Ces résultats obtenus par une approche lagrangienne sont à mettre en parallèle avec ceux du chapitre II.

Le modèle étudié, (voir chapitre IV), qui est une généralisation O(n), ($n \geqslant 1$), de Sine-Gordon présente d'autre part, au niveau quantique, des propriétés de renormalisation remarquables. La théorie est renormalisable, (à une boucle), uniquement pour n = 1, 2, c'est-à-dire lorsque la théorie classique associée est complètement intégrable (en effet, d'après le chapitre IV, le modèle pour $n \geqslant 3$ n'est pas complètement intégrable). De plus, dans ce cas, la fonction β s'annule pour toutes valeurs de la constante de couplage g. L'examen pour n = 2, du premier courant classique conservé non "trivial", au niveau quantique montre qu'aucune renormalisation propre n'est nécessaire. Un courant quantique conservé correspondant a pu être construit, avec à ce niveau, les mêmes propriétés que le courant classique (symétrie, trace nulle).

Il apparait donc possible de définir la théorie quantique de la même manière qu'au niveau classique : en imposant ordre par ordre la factorisabilité de la matrice S. Ceci conduira à l'addition de termes finis, et uniquement déterminés à chaque ordre, dans le Lagrangien, ou encore, d'une manière équivalente, à la construction ordre par ordre, d'une infinité de courants quantiques conservés.

Ceci a été explicitement réalisé jusqu'à l'ordre g^4 pour le Lagrangien et pour le premier courant conservé non "trivial".

Remarquons que le rôle du terme fini assurant la factorisabilité de la matrice S à l'ordre (p) est crucial pour les propriétés de renormalisation de la théorie à l'ordre (p + 1). Quelle est, en particulier, son influence pour l'annulation de la fonction β ? C'est-à-dire quel est le lien entre la non renormalisation de la constante de couplage et la factorisabilité de la matrice S ? Cette relation (si elle existe) semble s'intégrer dans un schéma plus général dont nous donnons ici un rapide descriptif. Nous envisagerons essentiellement deux cas distincts connus à ce jour.

Le premier est constitué par des théories des champs, en deux dimensions d'espace temps, admettant un point fixe infra-rouge. C'est le cas, par exemple, du modèle ϕ_2^4 invariant O(N) (modèle σ- linéaire) dont le Lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left\{ (\partial_\mu \vec{\phi})^2 - m^2 \vec{\phi}^2 - g^2 (\vec{\phi}^2)^2 \right\} \qquad (5.1)$$

On peut démontrer [35] en utilisant un développement 1/N que les amplitudes (3 $\longrightarrow$ 3) de la matrice S se factorisent uniquement pour une valeur très spéciale de la constante de couplage renormalisée $\lambda = 2\pi m^2$ (D'après le chapitre IV, la matrice S ne peut pas, en effet, être factorisable pour toutes valeurs de la constante de couplage). D'autre part, les calculs du groupe de renormalisation pour le modèle (5.1) montrent [36] qu'il existe un point fixe infra-rouge donné par $\lambda = 2\pi m^2$. Il est donc remarquable que la matrice S du modèle σ -linéaire se factorise pour une valeur unique de la

constante de couplage renormalisée qui est justement celle du point fixe infra-rouge de la théorie.

Le deuxième cas est celui de Théories des Champs ($d = 1 + 1$) ou de Modèles Statistiques ($d = 2$) pour lesquels la fonction β s'annule pour tout un ensemble continu de valeurs de g. Le modèle Sine-Gordon appartient à cette classe ainsi que le modèle Complex Sine.Gordon (jusqu'à une-boucle) comme nous l'avons vu au chapitre IV. D'autres exemples nous sont fournis par la mécanique statistique, également pour des modèles intégrables.

On distingue, en général, deux classes de tels systèmes. Une classe constituée par les modèles à vertex (modèle à 8-vertex [10]), le modèle Ashkin-Teller [37] . La deuxième classe est celle de modèles présentant une transition de phase du type Kosterlitz-Thouless [38] Le modèle central de cette classe est le modèle généralisé de Villain [39] Comme cas particulier, on obtient le modèle Gaussien, le modèle XY et le modèle Gaussien discret.

Tous ces modèles sont donc caractérisés par la présence d'une ligne critique au long de laquelle le comportement critique varie continuement : les fonctions de Green (ou de corrélations) associées aux opérateurs décrivant la théorie ont un comportement asymptotique "non universel", dépendant continuement d'un paramètre (la constante de couplage) qui décrit la ligne critique. Il y a donc apparemment plusieurs problèmes de transitions de phases distincts (a priori, un par modèle considéré). Néanmoins, certains développements récents suggèrent qu'il existe une connection profonde entre les divers comportements critiques des modèles cités précédemment [10 , 37 , 39]. En particulier, les

propriétés critiques des modèles XY et Gaussien discret peuvent être reliées à celles du modèle Gaussien [39]. De même pour les modèles à 8-vertex et Ashkin-Teller [40,41]. Pour ces deux derniers le programme se réalise de la manière suivante : on peut construire une correspondance un à un le long de la ligne critique (pour ce qui est des comportements critiques) entre les opérateurs du modèle à 8-vertex et les opérateurs du modèle Gaussien. Le même schéma se réalise pour le modèle Ashkin-Teller [40,41]. On a pu montrer à cette occasion l'existence de lois d'échelles généralisées entre les divers exposants critiques et ceci sur toute une partie continue des lignes critiques respectives. Ces diverses considérations semblent donc conduire à l'apparition d'une nouvelle classe d'universalité pour des modèles exhibant non plus un point critique mais toute une ligne de points critiques. Il sera donc intéressant d'envisager les implications de ce nouveau concept pour les modèles de Théories des Champs tels Sine-Gordon Complex Sine-Gordon ou encore les modèles de Toda [42] ; et ses relations avec l'intégrabilité complète classique ou quantique. Les résultats encourageants obtenus pour le modèle Complex Sine-Gordon suggèrent également une autre étape d'investigation dans la résolution du modèle. Nous connaissons les succès obtenus pour le modèle Sine-Gordon par les méthodes semi-classiques [8] et plus récemment par la méthode inverse quantique [12]. Il est donc naturel d'envisager une telle procédure. Il est à noter que la présence d'un couplage dérivatif (voir ch. IV) demandera une extension nouvelle de la Méthode Inverse Quantique (opérateurs L_n non ultra locaux).

Cette méthode apparait pour l'avenir comme étant un moyen privilégié d'investigation des phénomènes quantiques non perturbatifs

tant pour la Théorie des Champs que pour la Mécanique Statistique.

D'autre part, les développements récents pour des dimensions supérieures à deux, par le biais des équations de factorisations de la matrice S [17] ou encore par l'étude de l'intégrale fonctionnelle pour des surfaces aléatoires dépendent étroitement de l'expérience que nous aurons pu acquérir en dimension deux.

REFERENCES

1 - J. Liouville, J. Math. 18, 71 (1853).

2 - J. Scott Russell, Poc. Roy Soc. Edinburgh, 319 (1844).

3 - D.J. Korteweg and G. de Vries, Phil. Mag. 39, 422 (1895).

4 - I.M. Gel'fand and B.M. Lêvitan, Amer. Math. Soc. Transl. Vol 1, 253 (1955).

5 - C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal and M.D. Miura, Phys. Rev. Lett. 19, 1095 (1967).

V.E. Zakharov and L.D. Faddeev, Funct. Analys. and Appl. 5, 280 (1971) (variables angle action pour KdV).

6 - M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell and H. Segur Phys. Rev. Lett. 31 125 (1973) et Stud. in Appl. Math 53, 249 (1974).

7 - Extended System in Field Theory. J.L Gervais and A. Neveu Editors, Phys. Reports 23C, 237 (1976).

L.D. Faddeev and V.E. Korepin, Phys. Reports 42C (1978).

8 - R.F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, Phys. Rev. D 11, 3424 (1975).

9 - C.N. Yang, Phys. Rev. Lett. 19, 1312 (1967).

10 - R.J. Baxter, Ann. Phys. N.Y. 70, 193 (1972)

R.J. Baxter, Phil. Trans. Roy. Soc. London 289, 315 (1978).

11 - L.O Faddeev, Soviet Scient. Rev. C 1, 107 (1980)

H.B. Thacker, Rev. Mod. Phys. 53, 253 (1981)

12 - L.O. Faddeev, E.K. Sklyanin, L.A. Takhtazhyan, Teor. Mat. Fiz. 40, 194 (1979).

13 - P.P. Kulish, E.K. Sklyanin, Proceedings of the International Symposium on Integrable Quantum Field (1981), Ed. C. Montonen and J. Hietarinta.

14 - Phase transition and Critical Phenomena vol. 1, Ed. by C. Domb and M.S. Green.

15 - A.M. Polyakov, Phys. Lett. 103B, 207 (1981).

A.M. Polyakov, Phys. Lett. 103B, 211 (1981).

16 - A.B. Zamolodchikov and Al. B Zamolodchikov, Ann. Phys. NY 120, 253 (1979).

17 - A.B. Zamolodchikov, Comm. Math. Phys. 79, 489 (1981).

18 - D. Iagolnitzer, Phys. Lett. 76B, 207 (1978).

19 - J.H. Lowenstein and E.R. Speer, Comm. Math. Phys. 63, 97 (1978).

20 - L. Castillejo, R.H. Dalitz and F.J. Dyson, Phys. Rev. 101, 453 (1956).

21 - M. Karowski, H.J. Thun, T.T. Truong and P.H. Weisz, Phys. Lett. 67B, 321 (1977).

22 - W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni "Formulas and Theorems for Special Functions of Mathematical Physics", Springer Verlag, 1966.

23 - I.S. Gradshteyn, I.N. Ryzhik, Tables of Integrals, Series and Products, Moscow "Nauka" (1971).

24 - P. D. Lax, Comm. Pure Appl. Math. 21, 467 (1968).

25 - K. W. Morton, Phys. Fluids. vol. 7, 1801 (1964).

26 - F. D. Trappert, Phys. Fluids vol. 15, 2446 (1972).

27 - G.A. Nariboli, Eng. Res. Inst. Preprint 442, Iowa State Univ.

28 - R. Tappert and C.M. Varma, Phys. Rev. Lett. 25, 1108 (1970).

29 - B. D. Fried and Y. H. Ichihawa, J. Phys. Soc. Japan 34, 1073 (1973).

30 - K. Pohlmeyer, Comm. Math. 46, 207 (1976).

31 - F. Lund, Phys. Rev. Lett. 38, 1175 (1977).

F. Lund, Ann. Phys. NY 115, 251 (1978).

32 - F. Lund and T. Regge, Phys. Rev. D14, 1524 (1976).

33 - P.P. Kulish, Teor. Mat. Fiz. 33, 272 (1977).

34 - H. Eichenherr and J. Honerkamp, Freiburg Preprint 12 (1979).

35 - B. Berg and S. Meyer, Phys. Lett. 81B, 185 (1979).

36 - E. Brezin, J. Zinn-Justin and J.C. Le Guillou, Phys. Rev. D14, 2615 (1976).

37 - J. Ashkin and E. Teller, Phys. Rev. 64, 178 (1943).

38 - J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, J. Phys. C6, 1181 (1973).

39 - J. V. José, L.P. Kadanoëë, S. Kirpatrick and D.R. Nelson, Phys. Rev. B16, 1217 (1977).

40 - L.P. Kadanoff and A.C. Brown, Ann. Phys. 121, 318 (1979).

41 - H.J.F. Knops, Ann. Phys. 128, 448 (1980).

42 - A. V. Mijailov, JETP Lett. 30, 414 (1980).

A. N. Leznov and M. V. Saveliev, Math. Phys. Lett. 3, 489 (1979).

S. A. Bulgadaev, Phys. Lett. 96B, 151 (1980).